خصائص المحددات

سوف نرمز للصف بالرمز R وللعمود بالرمز K , ونضع رقم الصف او العمود اسفل الرمز من جهة اليمين فمثلا الصف الاول سنرمز له R_1 والعمود الاول K_1 وهكذا .

الخاصية الاولى اذا احتوى المحدد على صفين او عمودين متساويين فان قيمة المحدد تساوي الصفر

مثال

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

لاحظ ان الصف الاول مساو الى الصف الثاني

$$|A| = -2x3 - 3x(-2) = -6 + 6 = 0$$

الخاصية الثانية اذا كانت جميع عناصر صف او عمود في محدد اصفارا فان قيمة المحدد تساوي الصفر .

مثال

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

الحل سنعمل على حل المثال بطريقة العامل المنطبق وذلك باختيار الصف الاول

$$|B| = 2x\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - 0x\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} + 4x\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2x(0-0) - 0x(75+3) + 4x(0-0)$$

$$= 0$$

الخاصية الثالثة

اذا احتوى المحدد على صفين اوعمودين وكان احدهما يساوي حاصل ضرب الاخر في عدد ثابت فان قيمة المحدد تساوي الصفر .

مثال احسب قيمة المحدد التالي

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

الحل

لاحظ ان المحدد اعلاه فيه عناصر الصف الثالث مساويه لعناصر الصف الاول مضروبة في العدد (2) , اي ان ($R_3 = 2XR_1$)

الحل

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{matrix}$$

$$= (-16+0-30)-(-16+0-30)$$

$$= -16-30+16+30 = 0$$

الخاصية الرابعة

محدد اي مصفوفة مربعة مساوٍ الى محدد مدورها اي ان $|A| = |A^T|$

مثال

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & -6 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0x\begin{vmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} - 0x\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 0x\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0-0+0+3x\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{matrix}$$

$$= 3x[(-54+12-0)-(-72+0+30)$$

$$= 3x[-42+42] = 3x(0) = 0$$

الآن نجد محدد المدور

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 & 4 \\ 2 & -6 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

لنختار الصف الرابع لاحتوائه على اصفار اكثر

$$|A^T| = 0x\begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix} - 0x\begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 6 & 0 \end{vmatrix} + 0x\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 7 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} - (-3)x\begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0-0+0+3x\begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \\ -2 & -1 \end{matrix}$$

$$= 3x[(-54-0+12)-(-72-0+30)]$$

$$=3x[-42+42]=0$$

الخاصية الخامسة

المحدد للمصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

<u>مثال</u>

$$|D|=\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\0 & -7 & 0\\0 & 0 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}3 & 0\\0 & -7\\0 & 0\end{matrix}$$

$$=(-42+0+0)-(0+0+0)]$$

$$=-42=3(-7)(2)$$

اي ان المحدد هو عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

الخاصية السادسة

محدد حاصل جمع مصفوفتين مربعتين يساوي حاصل جمع محددي المصفوفتين

$$|A+B|=|A|+|B|$$

<u>مثال</u> لتكن

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\6 & -3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3 & 0\\-5 & 8\end{bmatrix}$$

<u>الحل</u> الطرف الايمن

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 5\\6 & -3\end{vmatrix}=-6-30=-36$$

$$|B|=\begin{vmatrix}3 & 0\\-5 & 8\end{vmatrix}=24-0=24$$

$$|A|x|B|=-36x24=-864$$

الطرف الايسر

$$AxB=\begin{bmatrix}2 & 5\\6 & -3\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}3 & 0\\-5 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-25 & 0+40\\18+15 & 0-24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19 & 40\\33 & -24\end{bmatrix}$$

$$|AxB|=-16(-24)-40(33)=-864$$

لاحظ ان الطرف الايمن يساوي الطرف الايسر

الخاصية السابعة

اذا امكن تجزئة صف او عمود في محدد الى مجموع صفين او عمودين فان المحدد يمكن تجزئته الى مجموع محددين يحتوي المحدد الاول على العناصر الاولى في ذلك الصف او العمود وبقية الصفوف و الاعمدة الاخرى ويحتوي المحدد الثاني على العناصر الاخرى في ذلك الصف او العمود مع بقية الصفوف والاعمدة الاخرى .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

لاحظ الصف الاول هو عباره عن مجموع عددين لذا يمكن تجزئة المحدد الى مجموع محددين . يستفاد من هذه الخاصية لحساب المحددات التي يكون ايجادها فيه شيء من الصعوبة كما تستخدم لحساب المحددات التي تحتوي على رموز كالحروف مثلا .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

الخاصية الثامنة **اذا ابدل صف محل صف او عمود محل عمود آخر فان قيمة المحدد العددية تبقى ثابتة وتتغير فقط اشارة المحدد .**

مثال

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3x9 - 5x(-3) = 27 + 15 = 42$$

نعمل على ابدال العمود الاول بالعمود الثاني ($K_1 \leftrightarrow K_2$)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 5x(-3) - 3x9 = -15 - 27 = -42$$

لاحظ ان القيمة العددية للمحدد ثابتة وتغيرت فقط الاشارة من موجبة الى سالبة .

الخاصية التاسعة

اذا ضربت جميع عناصر صف او عمود لمحدد في عدد ثابت k فان قيمة المحدد تضرب بنفس العدد الثابت

مثال

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

الان لنضرب الصف الثاني في العدد الثابت k ونحسب المحدد اعلاه نجد ان

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + ka_{13}a_{21}a_{32} - ka_{31}a_{22}a_{13} - ka_{32}a_{23}a_{11} - ka_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= k[a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}]$$

$$= k|A|$$

<u>مثال</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

$$= 0 - 0 + 9 - 12 - 6 + 0 = -9$$

نضرب العمود الاول في العدد (3) ونحسب المحدد الناتج

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \\ 6 & -3 \end{matrix}$$

$$= 27 - 36 - 18 = 27 - 54$$

$$= -27 = 3(-9) = 3|A|$$

<u>الخاصية العاشرة</u>

اذا ضربت جميع عناصر صف او عمود في عدد ثابت k واضيفت الى العناصر المقابلة لها في صف او عمود آخر فان قيمة المحدد لا تتغير .
لهذه الخاصية اهمية في تبسيط عناصر اي محدد بحيث تصبح عناصر صف معين او عمود معين اصفارا عدا عنصر واحد فقط , وبذلك يسهل ايجاد مفكوك المحدد .

<u>مثال</u> احسب قيمة المحدد التالي

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{-1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

<u>الحل</u>

لا يجاد هذا المحدد سنعمل على جعل عناصر الصف الثالث اصفارا عدا عنصر واحد وذلك با جراء العمليات التالية

1) $6R_1$ (2) $4R_2$ نحصل على المحدد التالي

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

3) $4K_1 + K_2$ (4) $K_3 - K_1$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4(3)-6 & -2-3 \\ 3 & 4(3)+2 & -4-3 \\ 1 & 4-4 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 3 & 14 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

نختار الصف الثالث

$$=\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 14 & -7 \end{vmatrix}+0+0$$

$$=-42-(-5)(14)=-42+70=28$$

مثال جد

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل لا يجاد هذا المحدد نعمل على جعل عناصر الصف الاول جميعها اصفارا عدا العنصر الاول لذا نحتاج الى العمليات التالية على الاعمدة

1) $-2K_1+K_2$
2) $2K_1+K_3$
3) $-3K_1+K_4$

نحصل على

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & -8 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

نختار الصف الاول لحساب قيمة المحدد وذلك لا نه يحتوي على اصفار اكثر

$$|A|=(-1)^2 x1x\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 6 & -8 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \\ 4 & 7 \end{matrix}$$

$$=[(-6+96-70)-(120-56-6])$$

$$=-6+96-70-120+56+6$$

$$=152-190=-38$$

امثلة حول الخواص

مثال (1) اذا كان

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=7 \quad \text{احسب} \quad |B|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

الحل محدد B يمكن تجزئته الى مجموع محددين حسب الخاصية اعلاه

$$|B|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

لاحظ ان المحدد الثاني يحتوي على صفين متساويين هما الصف الاول والصف الثاني ($R_1 = R_2$) قيمة هذا المحدد تساوي الصفر

$$|B|=2x\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=2(7)=14$$

<u>مثال (2)</u> جد قيمة x التي تحقق العلاقة التالية

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>الحل</u> نجد قيم المحددين

$$2x^2-40=18-40$$
$$2x^2-18=0 \qquad \div 2$$
$$x^2=9 \quad \Rightarrow \quad x=\mp 3$$

<u>مثال (2)</u> اثبت ان

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}=0 \qquad \cdots(1)$$

<u>الحل</u> باستخدام الخواص بما ان $|A|=|A^T|$ اي ان

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & yz & x \\ 1 & zx & y \\ 1 & xy & z \end{vmatrix}$$

نجري العمليات التالية على الصفوف

$$1)\frac{x}{x}R_1 \quad , \quad (2)\frac{y}{y}R_2 \quad , \quad (3)\frac{z}{z}R_3$$

ومن الخواص اذا ضربت جميع عناصر صف او عمود في ثابت فان المحدد يضرب بنفس الثابت اذن

$$\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x & xyz & x^2 \\ y & xyz & y^2 \\ z & xyz & z^2 \end{vmatrix}=\frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ y & 1 & y^2 \\ z & 1 & z^2 \end{vmatrix}$$

الان نعمل على ابدال العمود الاول بالعمود الثاني فتتغير اشارة المحدد أي يسبق بأ شارة سالبة نعوض في العلاقة (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=0$$

مثال (3) اثبت ان

$$\begin{vmatrix} \csc^2 x & \cot^2 x & 1 \\ \cot^2 x & \csc^2 x & -1 \\ 42 & 40 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

من خواص المحددات اذا ضربت جميع عناصر صف او عمود في عدد ثابت واضيفت الى العناصر المقابلة لها في صف او عمود اخرفان قيمة المحدد لاتتغير اذن نضرب العمود الثاني والعمود الثالث في (-1) ونضيفهم الى العمود الاول $k_1 = k_1 - k_2 - k_3$ **نحصل على**

$$\begin{vmatrix} \csc^2 x - \cot^2 x - 1 & \cot^2 x & 1 \\ \cot^2 x - \csc^2 x + 1 & \csc^2 x & -1 \\ 42 - 40 - 2 & 40 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cot^2 x & 1 \\ 0 & \csc^2 x & -1 \\ 0 & 40 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

حسب خواص المحددات اذا احتوى المحدد على صف او عمود جميع عناصره اصفار فان قيمة المحدد تساوي الصفر .

مثال (4) **اذا كان** $x = -4$ **احد جذور المعادلة** $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ **اوجد الجذرين الاخرين**

الحل **نضيف الصف الثاني والصف الثالث الى الاول وذلك باستخدام خصائص المحددات (اذا اضيفت عناصر صف او عمود الى عناصر صف او عمود آخر فان قيمة المحدد لا تتغير)**

اي ان $(R_1 = R_1 + R_2 + R_3)$

$$\begin{vmatrix} x+1+3 & 2+x+2 & 3+1+x \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} \qquad (k_2 = k_2 - k_1 \quad , k_3 = k_3 - k_1)$$

$$(x+4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 1 & x-1 & 1-1 \\ 3 & 2-3 & x-3 \end{vmatrix} = (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (x+4)\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+4)(x-1)(x-3) = 0$$

$$(x+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

$$(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

مثال (5) برهن ان

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a-b \\ c+a & b & b-c \\ a+b & c & c-a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$$

<u>الحل</u> 1) نجزئ العمود الاول حسب خصائص المحددات

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a-b \\ c+a & b & b-c \\ a+b & c & c-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & a-b \\ c & b & b-c \\ a & c & c-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a-b \\ a & b & b-c \\ b & c & c-a \end{vmatrix}$$

2) نجزئ العمود الثاني في المحددين

$$= \begin{vmatrix} b & a & a \\ c & b & b \\ a & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & -b \\ c & b & -c \\ a & c & -a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ a & b & b \\ b & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & -b \\ a & b & -c \\ b & c & -a \end{vmatrix}$$

لاحظ ان المحدد الاول فيه $K_2 = K_3$ وكذلك المحدد الثالث لذا فان هذه المحددات تساوي الصفر حسب خواص المصفوفات

$$= 0 + (-1)\begin{vmatrix} b & a & b \\ c & b & c \\ a & c & a \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} c & a & -b \\ a & b & -c \\ b & c & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} c & a \\ a & b \\ b & c \end{matrix}$$

المحدد الاول فيه عمودين متساويين وقيمته ايضاً تساوي الصفر

$$= -abc - abc - abc + b^3 + c^3 + a^3$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

<u>مثال(6)</u> باستخدام خصائص المحددات اثبت ان

$$\begin{vmatrix} a+b & c+1 & 1 \\ b+c & a+1 & 1 \\ a+c & b+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>الحل</u> نجزئ العمود الثاني

$$\begin{vmatrix} a+b & c+1 & 1 \\ b+c & a+1 & 1 \\ a+c & b+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ a+c & b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+b & 1 & 1 \\ b+c & 1 & 1 \\ a+c & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$K_1 = K_2 + K_1$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & c & 1 \\ a+b+c & a & 1 \\ a+b+c & b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$(a+b+c)(0) = 0$$

مثال (7) اثبت ان

$$\begin{vmatrix} 2a_1+b_1 & 2b_1+c_1 & 2c_1+a_2 \\ 2a_2+b_2 & 2b_2+c_2 & 2c_2+a_2 \\ 2a_3+b_3 & 2b_3+c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

الحل

الطرف الايسر

1) نجزئ العمود الاول فنحصل على

$$\begin{vmatrix} 2a_1+b_1 & 2b_1+c_1 & 2c_1+a_2 \\ 2a_2+b_2 & 2b_2+c_2 & 2c_2+a_2 \\ 2a_3+b_3 & 2b_3+c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & 2b_1+c_1 & 2c_1+a_2 \\ 2a_2 & 2b_2+c_2 & 2c_2+a_2 \\ 2a_3 & 2b_3+c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & 2b_1+c_1 & 2c_1+a_2 \\ b_2 & 2b_2+c_2 & 2c_2+a_2 \\ b_3 & 2b_3+c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

2_) نجزئ العمود الثاني في المحددين الذي على اليمين فنحصل على اربعة محددات

$$= \begin{vmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1+a_2 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2+a_2 \\ 2a_3 & 2b_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1 & c_1 & 2c_1+a_2 \\ 2a_2 & c_2 & 2c_2+a_2 \\ 2a_3 & c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & 2b_1 & 2c_1+a_2 \\ b_2 & 2b_2 & 2c_2+a_2 \\ b_3 & 2b_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 2c_1+a_2 \\ b_2 & c_2 & 2c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

3) لاحظ ان المحددات الثلاثة الاولى فيها اعمده مضروبة بعدد ثابت (2) لذا من خصائص المحددات فان هذه المحددات تضرب بنفس العدد اذن سنحصل على

$$= 2(2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2c_1+a_2 \\ a_2 & b_2 & 2c_2+a_2 \\ a_3 & b_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 2c_1+a_2 \\ a_2 & c_2 & 2c_2+a_2 \\ a_3 & c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & 2c_1+a_2 \\ b_2 & b_2 & 2c_2+a_2 \\ b_3 & b_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 2c_1+a_2 \\ b_2 & c_2 & 2c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

4) المحدد الثالث مساو للصفر بسب كون العمودين الاول والثاني متساويين

5) الآن سنعمل على تجزئة العمود الثالث في المحددات الاول والثاني والرابع فنحصل على

$$= 4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2c_1 \\ a_2 & b_2 & 2c_2 \\ a_3 & b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 2c_1 \\ a_2 & c_2 & 2c_2 \\ a_3 & c_3 & 2c_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & a_2 \\ a_2 & c_2 & a_2 \\ a_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 2c_1 \\ b_2 & c_2 & 2c_2 \\ b_3 & c_3 & 2c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

6) المحددات الثاني والرابع تساوي الصفر بسبب وجود اعمدة متساوية

$$= 4(2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 2(4)\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

7) المحددات الثاني والثالث مساوية للصفر لنفس السبب السابق

$$= 8\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

8) في المحدد الثاني نعمل على ابدال العمود الاول بالعمود الثالث فتتغير اشارة المحدد (اذا ابدل صف محل صف او عمود محل عمود اخر فان القيمة العددية للمحدد تبقى ثابتة وتتغير فقط اشارة المحدد)

$$= 8\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

9) نجري مرة اخرى ابدال العمود الثاني بالعمود الثالث فتتغير اشارة المحدد الى الموجب لنفس السبب اعلاه