امثلة حول التكامل بالتجزئة

Ex (1) $\int \tan^{-1} x \, dx$

الحل نفرض $u = \tan^{-1} x$ بالاشتقاق $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

ونفرض $dv = dx$ بالتكامل $\int dv = \int dx \quad \leftarrow \quad v = x$

قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int x . \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + c$$

EX (2) Find $\int x \ln x \, dx$

الحل نفرض $u = \ln x$ بالاشتقاق $du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = xdx$ بأجراء التكامل للطرفين $\int dv = \int xdx \quad \dfrac{x^2}{2} = v \leftarrow$

بالتعويض في قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

EX **(3)** $\int x\cos x dx$

الحل **نفرض** $u = x$ **بالاشتقاق** $du = dx$

ونفرض $dv = \cos x dx$ بتكامل الطرفين $\sin x = v$

نعوض في قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx$$
$$= x\sin x - (-\cos x) + c$$
$$= x\sin x + \cos x + c$$

EX **(4)** $\int x^2 e^x dx$

الحل **نفرض** $u = x^2$ **باشتقاق الطرفين** $du = 2x dx$

ونفرض $dv = e^x dx$ **وبتكامل الطرفين** $v = e^x$

نعوض بقانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x\, dx$$
$$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx \quad \cdots (1)$$

نعمل على اجراء التكامل بالتجزئة مرة اخرى للتكامل في الطرف الايمن للعلاقة (1) وذلك بفرض

$du = dx \quad \rightarrow \quad u = x$ **ونفرض** $dv = e^x dx \rightarrow \int dv = \int e^x dx$

نعوض في قانون التكامل $v = e^x$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$
$$= xe^x - e^x + c \quad \cdots(2)$$

تعويض (2) في (1) نحصل على

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - e^x\right] + c$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

EX(5) $\int \sin(\ln x)\,dx$

الحل **نفرض** $u=\sin(\ln x) \rightarrow du=\cos(\ln x)\,dx$

$dv=dx \rightarrow v=x$

نعوض في قانون التكامل $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \qquad \cdots(1)$$

باجراء التكامل بالتجزئة مرة اخرى للطرف الايمن في (1)

نفرض $u=\cos(\ln x) \rightarrow du=-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$ **ونفرض**

$dv=dx \rightarrow v=x$ **نعوض في (1)**

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x) - \int -x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx]$$
$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$$

بنقل $\int \sin(\ln x)dx$ الى الطرف الايسر نحصل على

$$\int \sin(\ln x)dx + \int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + c$$

$$2\int sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + c$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + c_1 \quad \left(c_1 = \frac{c}{2}\right)$$