المقارنات المتعددة

Multiple Comparisons

مقدمة

عند رفض فرض العدم الخاص بتساوي المتوسطات في تحليل التباين ، يقترح الباحث آن ذاك المقارنة بين كل وسطين لمعرفة أي من الأوساط يختلف عن الوسط أو الأوساط الأخرى. وفي هذه الحالة يتم إجراء مقارنات عديدة تسمى بالمقارنات المتعددة (Multiple Comparisons) أو المقارنات الثنائية، وهناك الكثير من الطرق الإحصائية لإجراء مثل هذه المقارنات، والتي تجرى خاصة بعد إجراء التجربة.

وفي كثير من الحالات التطبيقية يهتم الباحث بتحديد مقارنات معينة بين المتوسطات لتحقيق الهدف من البحث قبل تنفيذ التجربة، وتسمى بالمقارنات المخططة (Planned in advance)، ولإجراء هذه المقارنات تستخدم طريقة المقارنات المصممة (Contrasts)، وفيما يلي عرض لكلا الطريقتين:

أولا:- المقارنات المتعددة

هناك الكثير من الطرق الإحصائية لإجراء هذه المقارنات، من أهمها وأبسطها ما يلي:

١- طريق أقل فرق معنوي محمي أو محفوظ Protected Least Significant Difference (LSD)

٢- طريقة دنكن لاختبار المدى المتعدد Duncan's Multiple Range Test (DMRT)

طريقة أقل فرق معنوي LSD

تتلخص خطوات إجراء هذه الطريقة في الآتي:

- تكوين جدول تحليل التباين، وحساب إحصائية الاختبار $F = MSB/MSE$
- اختبار الفرض :

$$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_K = \mu$$
$$H_a : at\ \ least\ \ Two\ \ of\ \ \ Means\ \ Are\ \ Difference$$

- **عند قبول الفرض العدم H_o يتم التوقف عند هذا الحد من تحليل التباين.**
- **في حالة رفض الفرض العدم H_o ، يستدل من ذلك أنه على الأقل يوجد متوسطين مختلفين، ومن ثم يتم إجراء اختبار LSD ، بإتباع الآتي:**

١- **حساب قيمة أقل فرق معنوي LSD لاختبار الفرض العدم: $H_o : \mu_i - \mu_{i'} = 0$ ضد الفرض البديل $H_a : \mu_i - \mu_{i'} \neq 0$ وهو:**

$$LSD = t_{\left(1-\alpha/2\ ,\ \nu\right)} S_{\left(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right)}$$

حيث أن :

$$S_{\left(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right)} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)}\ ,\ if\ \ n_i \neq n_{i'}$$

$$S_{\left(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right)} = \sqrt{MSE\left(\frac{2}{n}\right)}\ ,\ if\ \ n_i = n_{i'} = n$$

وأن MSE هو متوسط مربعات الأخطاء العشوائية ونحصل عليه من جدول تحليل التباين ، ν هي درجات حرية الأخطاء ونحصل عليها أيضا من جدول تحليل.

٢- **ترتيب المتوسطات المحسوبة تصاعديا وحساب الفرق بين كل متوسطين متتاليين ومقارنة هذا الفرق بأقل فرق معنوي LSD .**

٣- **إذا كان $\left|\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right| > LSD$ يرفض الفرض العدم $H_o : \mu_i - \mu_{i'} = 0$ ويقبل الفرض البديل $H_a : \mu_i - \mu_{i'} \neq 0$ ويستدل من ذلك على وجود فرق معنوي بين المتوسطين $\mu_i , \mu_{i'}$ ،**

. $i \neq i' = 1,2,...,k$

مثال (٣-١) صــ ٥٢

	أصناف البرتقال				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
$\bar{y}_{i.}$	**12.0**	**16.86**	**21.0**	**13.0**	**16.0**

ANOVA

S.O.V	Df	SS	MS	F
Between	**4**	**353.31**	**88.328**	**4.01**
Within	**30**	**660.86**	**22.029**	
Total	**34**	**1014.17**		

$F_{(4,30)}^{0.95} = 2.69$

إذا يـرفض الفـرض : $H_o : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu$ **، ويوجـد متوسـطان علـى الأقـل مختلفان، لذا يتم إجراء المقارنات الثنائية بين المتوسطات باستخدام اختبار LSD .**

١- حسـاب قيمـة أقـل فـرق معنـوي LSD لاختبـار الفـرض العـدم : $H_o : \mu_i - \mu_{i'} = 0$ **ضـد الفـرض البـديل وهو:** $H_a : \mu_i - \mu_{i'} \neq 0$

$$LSD = t_{\left(1-\alpha/2\ ,\ \nu\right)} S_{\left(\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}\right)} = t_{\left(0.975\ ,\ 30\right)} \sqrt{MSE\left(\frac{2}{n}\right)}$$

$$= 2.042\sqrt{22.029\left(\frac{2}{7}\right)} = 5.123$$

٢- ترتيب الأوساط تصاعديا، وحساب الفرق بين كل وسطين.

A	D	E	B	C
12	13	16	16.886	21

ونكون الجدول الذي يعكس الفروق ، ووضع نجمة (*) على الفرق المعنوي.

		A	D	E	B
	$\bar{y}_i$	12	13	16	16.886
C	21	9^*	8^*	5	4.114
B	16.886	4.886	3.886	0.886	
E	16	4	3		
D	13	1			

يوجد فرق معنوي بين متوسط إنتاج الشجرة من النوع C ومتوسط إنتاج الشجرة من النوع A ، وبين متوسط إنتاج الشجرة من النوع C والنوع D ، بينما لا يوجد فرق معنوي بين كل متوسطي خلاف ذلك.

طريقة دنكن لاختبار المدى المتعدد

Duncan's Multiple Range Test (DMRT)

اقترح هذا الاختبار Duncan عام ١٩٥٥ وتتلخص هذه الطريقة في إيجاد عدة فروق معنوية ذات قيم متزايدة والتي يتوقف حجمها على مدى البعد بين المتوسطات بعد ترتبها. وفيما يلي خطوات إجراء هذه الطريقة حتى يسهل لنا فهمها.

١- ترتيب متوسطات (المجموعات) تصاعديا.

٢- إيجاد الخطأ المعياري للمتوسطات $S_{\bar{y}_i} = \sqrt{MSE/n}$ ، $i = 1,2,...,t$ ، وإذا كانت (أحجام العينات) غير متساوية ، يستخدم لها وسطا توافقي ، يحسب كالتالي:

$$n = n_h = \frac{t}{\sum_{i=1}^{t} 1/n_i}$$

٣- استخراج القيم الجدولية لـ "دنكن" $q_\alpha(k,\nu)$ من جداول (A-5) ، حيث أن $k = 2,...,t$ ، α هي مستوى المعنوية، ν هي درجات الحرية الخاصة بمجموع مربعات الخطأ العشوائي.

٤- حساب قيمة أقل مدى معنوي R_k وذلك بالنسبة لكل من $k = 2,...,t$ ، كما يلي:

$$R_k = q_\alpha(k,\nu)\ S_{\bar{y}_i}\ ,\quad for\ k = 2,3,...,t$$

٥- مقارنة الفروق بين متوسطات المجموعات (المعالجات) ونبدأ بمقارنة أكبر متوسط مع أقل متوسط بقيمة أقل مدى معنوي R_t ثم نقارن الفرق بين أكبر متوسط وثاني أصغر متوسط بالمدى المعنوي R_{t-1} ، ونستمر هكذا إلى أن يتم مقارنة كل الأزواج وعددها $t(t-1)/2$.

٦- إذا كان الفرق المحسوب بين متوسطي أعلى من R_k يكون ذلك الفرق معنويا، أي يوجد فرق معنوي

بين هذين المتوسطين.

المثال السابق

	أصناف البرتقال				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
$\bar{y}_{i.}$	**12.0**	**16.86**	**21.0**	**13.0**	**16.0**

١- نقوم بحساب R_k ، $k = 2,3,4,5$

بما أن ***n=7*** **، إذا الخطأ المعياري لكل متوسط مجموعة هو:**

$$S_{\bar{y}_i} = \sqrt{MSE/n} = \sqrt{22.029/7} = 1.774$$

k	$q_{0.05}(k,30)$	$R_k = q_\alpha(k,30)\ 1.774$
2	2.89	5.127
3	3.04	5.393
4	3.12	5.535
5	3.2	5.677

٢- ترتيب متوسطات المعالجات (المجموعات) تصاعدي.

A	**D**	**E**	**B**	**C**
12	**13**	**16**	**16.886**	**21**

٣- تكوين جدول الفروق

		A	D	E	B
	$\bar{y}_i$	12	13	16	16.886
C	21	$9 > R_5$	$8 > R_4$	$5 < R_3$	$4.114 < R_2$
B	16.886	$4.886 < R_4$	$3.886 < R_3$	$0.886 < R_2$	
E	16	$4 < R_3$	$3 < R_2$		
D	13	$1 < R_2$			

يمكن وضع الجدول بطريقة أخرى

		A	D	E	B
	$\bar{y}_i$	12	13	16	16.886
D	13	$1 < R_2$			
E	16	$4 < R_3$	$3 < R_2$		
B	16.886	$4.886 < R_4$	$3.886 < R_3$	$0.886 < R_2$	
C	21	$9 > R_5$	$8 > R_4$	$5 < R_3$	$4.114 < R_2$

يوجد فرق معنوي بين متوسط إنتاج الشجرة من النوع C ومتوسط إنتاج الشجرة من النوع A ، وبين متوسط إنتاج الشجرة من النوع C والنوع D ، بينما لا يوجد فرق معنوي بين كل متوسطي خلاف ذلك. وهي نفس النتيجة

التي توصلنا إليها في الاختبار السابق.

ويمكن وضع خطوط أفقية بين كل وسطين ليس بينهما فرق معنوي، كما يلي.

C	B	E	D	A
21	16.886	16	13	12