

اختبارات الفروض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين

أولاً: إذا كانت العينتان مستقلتان

بافتراض أن كل مجتمع من المجتمعين له توزيع طبيعي، خصائص كل منهما كما يلي:

خصائص المجتمع	المجتمع الأول	المجتمع الثاني
المتوسط	μ_1	μ_2
التباين	σ_1^2	σ_2^2
الخصائص	$x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$	$x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

للحصول على التقدير بنقطة للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ ، يجب اتباع الآتي:

١- سحب عينة عشوائية من المجتمع الأول، حجمها n_1 ، وبياناتها هي: $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ ، وحسب

لها الوسط الحسابي \bar{x}_1 ، وكذلك التباين S_1^2 ، كما يلي:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}, \quad \bar{x}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}}{n_1}$$

٢- سحب عينة عشوائية من المجتمع الثاني، حجمها n_2 ، وبياناتها هي: $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$ ،

ويحسب لها الوسط الحسابي \bar{x}_2 ، وكذلك التباين S_2^2 ، كما يلي:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}, \quad \bar{x}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}}{n_1}$$

٣- التقدير بنقطة للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ هو:

$$\hat{(\mu_1 - \mu_2)} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad (3-1)$$

٤- وتوزيع المعاينة لهذا التقدير هو التوزيع الطبيعي، وله الخصائص التالية:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N \left(\mu_1 - \mu_2, \left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \right) \right) \quad (3-2)$$

● اختبار فرض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين

الغرض من هذا الاختبار هو مقارنة متوسطي مجتمعين من خلال اختبار الفرق بينهما، واتباع نفس الخطوات السابقة في اختبار فرض حول متوسط مجتمع، يمكن اختبار فرض حول الفرق بين المتوسطين

$(\mu_1 - \mu_2)$ كما يلي:

١- صياغة الفروض.

الفرض العدم H_o	الفرض البديل H_a
$H_o : (\mu_1 - \mu_2) = (\mu_1 - \mu_2)_o$	$H_a : (\mu_1 - \mu_2) \neq (\mu_1 - \mu_2)_o$
$H_o : (\mu_1 - \mu_2) = (\mu_1 - \mu_2)_o$	$H_a : (\mu_1 - \mu_2) > (\mu_1 - \mu_2)_o$
$H_o : (\mu_1 - \mu_2) = (\mu_1 - \mu_2)_o$	$H_a : (\mu_1 - \mu_2) < (\mu_1 - \mu_2)_o$

- ٢- تحديد مستوى المعنوية α ، وتوزيع المعاينة، ومن ثم القيم الحرجة **Critical Values**
- ٣- توزيع المعاينة الذي يتبعه إحصائية الاختبار، ويتحدد بناءً على ما إذا كان تبايني المجتمع (σ_1^2 ، σ_2^2) معلوم، أو غير معلوم، وفيما يلي بيان ذلك:

تبايني المجتمع (σ_1^2 ، σ_2^2)		إحصائية الاختبار	توزيع المعاينة
معلوم		$Z^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\sim N(0, 1)$
غير معلوم	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$	$\sim t_{(n_1 + n_2 - 2)}$
	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$\sim t_{(v)}$

حيث أن S_p^2 هو التباين المرجح أو (المشترك) **Pooled Variance**، ويستخدم كتقدير غير

متحيز لتباين المجتمع في حالة $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ، ويحسب بإيجاد المتوسط المرجح لتبايني العينتين كما يلي:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \quad (3-3)$$

كما أن ν هي درجات الحرية المحسوبة لتوزيع t ، حالة عدم تساوي تبايني

المجتمعين $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ، ويعبر عنها بالمعادلة التالية:

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{(n_1-1)} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{(n_2-1)}} \quad (3-4)$$

الخلاصة

إذا كانت العينتان مستقلتان، يبين الجدول التالي إحصائية الاختبار، وكذلك فترات الثقة في حالة

معلومية، وعدم معلومية التباينين:

تبايني المجتمعين		إحصائية الاختبار	فترة الثقة
معلوم		$Z^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{(1-\alpha/2)}$
غير معلوم	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} t_{(1-\alpha/2, n_1+n_2-2)}$
	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} t_{(1-\alpha/2, \nu)}$

تطبيقات

مثال (٢-١) ص ٣٣

بيانات العينتين

	عينة التفاح (١)	عينة البرتقال (٢)
	4.86	4.72
	5.11	4.81
	5.23	5.22
	5.19	5.67
	5.61	5.52
	5.32	4.96
	5.20	5.35
	4.95	5.34
	4.98	
n_i	9	8
$\sum x_{ij}$	46.45	41.59
$\sum x_{ij}^2$	240.1381	217.0219

ومن ثم يمكن حساب المتوسط والتباين لكل عينة، كما يلي:

العينة الأولى	العينة الثانية
$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_1}{n_1} = \frac{46.45}{9} = 5.16$	$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_2}{n_2} = \frac{41.59}{8} = 5.2$
$S_1^2 = \frac{\sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n_1}}{(n_1 - 1)}$ $= \frac{240.1381 - \frac{(46.45)^2}{9}}{8} = 0.05056$	$S_2^2 = \frac{\sum x_2^2 - \frac{(\sum x_2)^2}{n_2}}{(n_2 - 1)}$ $= \frac{217.0219 - \frac{(41.59)^2}{8}}{7} = 0.11513$
$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$ $= \frac{8(0.05056) + 7(0.11513)}{(9 + 8 - 2)} = 0.08069$	

بفرض أن :

μ_1 : متوسط كمية الصوديوم (ml/100gr) في النوع الأول (التفاح).

μ_2 : متوسط كمية الصوديوم (ml/100gr) في النوع الثاني (البرتقال).

وفيما يلي خطوات اختبار الفرض :

● صياغة الفروض

$$H_o : (\mu_1 = \mu_2) \text{ or } H_o : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$

$$H_a : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$

● توزيع المعاينة ومناطق الرفض والقبول

تبايني المجتمع غير معلوم، وهما متساويان ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)، لذا يكون توزيع المعاينة هو

توزيع t بدرجات حرية $(n_1 + n_2 - 2) = 9 + 8 - 2 = 15$ ، وحيث أن مستوى

المعنوية هو: $\alpha = 0.05$ ، تكون القيمة الحرجة هي : $t_{(0.975,15)} = 2.131$

● إحصائية الاختبار

$$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{(5.16 - 5.2) - 0}{\sqrt{0.8069 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8} \right)}} = -0.29$$

● القرار

بما أن : $|t^*| = 0.29 < t = 2.131$ إذا لا يمكن رفض الفرض العدم

واجب منزلي: أنشاء فترة ثقة 95% للفرق بين المتوسطين.

اختبار تساوي تبايني مجتمعين

Test of Equal Two Variances

خطوات الاختبار

● صياغة الفروض

الفرض العدم H_o	الفرض البديل H_a
$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

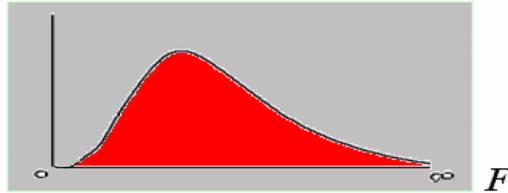
● تحديد التوزيع الاحتمالي لإحصائية الاختبار

إذا كان S_1^2 ، S_2^2 ، هما تبايني العينتين المسحوبتين من المجتمعين بحيث أن $(S_1^2 > S_2^2)$ ، فإن

إحصائية الاختبار هي:

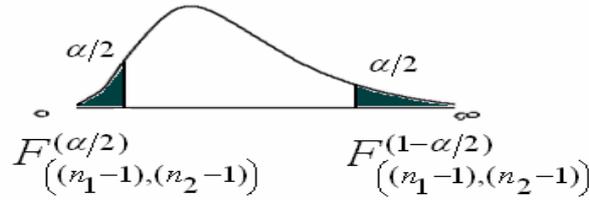
$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{((n_1-1), (n_2-1))} \quad (3-5)$$

حيث أن F^* تحت صحة الفرض العدم لها توزيع احتمالي يسمى توزيع F بدرجات حرية بسط = $n_1 - 1$ ، ودرجات حرية مقام $n_2 - 1$ ، وهما معالم هذا التوزيع ، كما يعتبر توزيع F توزيع موجب الالتواء ، ويعبر عنه بمنحنى يأخذ الصورة التالية:



● تحديد مستوى المعنوية، ومناطق الرفض والقبول من خلال استخراج القيمة الجدولية، وهي:

$$F_{((n_1-1), (n_2-1))}^{(\alpha/2)} \cdot F_{((n_1-1), (n_2-1))}^{(1-\alpha/2)}$$



وحيث أننا وضعنا تباين العينة الأكبر في البسط، وتباين العينة الأصغر في المقام، سوف نستخدم منطقة الرفض اليمنى فقط.

● القرار:

إذا كان قيمة F^* المحسوبة أكبر من $F_{((n_1-1), (n_2-1))}^{(1-\alpha/2)}$ الجدولية، يرفض فرض العدم

، ويستدل من ذلك على أن تبايني المجتمعين غير متساويين. $H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

اختبار التجانس في مثال (٢-١) ص ٣٣

• البيانات المتاحة:

	العينة الأولى	العينة الثانية
n	$n_1 = 9$	$n_2 = 8$
S_i^2	$S_1^2 = 0.05056$	$S_2^2 = 0.11513$

• خطوات الاختبار

صياغة الفروض:

$$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

إحصائية الاختبار هي:

$$F^* = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0.115}{0.051} = 2.255 \sim F_{(7,8)}$$

مناطق الرفض والقبول.

$$\alpha/2 = 0.025 , \alpha = 0.05$$

درجات حرية البسط: $n_2 - 1 = 8 - 1 = 7$ (التباين الأكبر)

درجات حرية المقام : $n_1 - 1 = 9 - 1 = 8$ (التباين الأصغر)

إذا القيمة الجدولية هي:

$$F_{((n_2-1),(n_1-1))}^{(1-\alpha/2)} = F_{(7,8)}^{(0.975)} = 4.53$$

القرار:

بما أن $F^* = 2.255 < F_{(7,8)}^{(0.975)} = 4.53$ إذا لا يمكننا رفض الفرض العدم ، ويستدل من

ذلك على أن التباينين متساويين.

ثانياً: إذا كانت العينتان غير مستقلتين

يقصد بالعينتين غير المستقلتين ، أن مفردات العينة لم يتغير ، وإنما كل ما يتم ، هو أخذ القياس على كل مفردة مرتين ، مرة قبل تطبيق المعالجة أو الطريقة ، ومرة بعد تطبيق المعالجة أو الطريقة ، وفي هذه الحالة إذا وجد اختلاف بين المتوسطين إنما يمكن إرجاع ذلك لأثر الطريقة.

• طريقة إجراء الاختبار

بفرض أن :

i	العينة قبل	العينة بعد	عينة الفروق
	x_1	x_2	$d = x_2 - x_1$
1	x_{11}	x_{21}	$d_1 = (x_{21} - x_{11})$
2	x_{12}	x_{22}	$d_2 = (x_{22} - x_{12})$
3	x_{13}	x_{23}	$d_3 = (x_{23} - x_{13})$
i	x_{1i}	x_{2i}	$d_i = (x_{2i} - x_{1i})$
n	x_{1n}	x_{2n}	$d_n = (x_{2n} - x_{1n})$

يتم حساب المتوسط والتباين للفروق:

$$\bar{d} = \sum d_i / n \quad S_d^2 = \sum (d_i - \bar{d})^2 / (n-1)$$

في هذه الحالة يتم اختبار فرض حول متوسط الفرق $\mu_d = \mu_2 - \mu_1$ ، باعتباره اختبار خاص بمتوسط واحد.

ومن ثم يمكن تلخيص خطوات الاختبار في النقاط التالية:

١- حساب عينة الفروق $d_i = (x_{2i} - x_{1i})$ ، ومن ثم حساب الوسط الحسابي لها $\bar{d} = \sum d_i / n$ ،

وكذلك الانحراف المعياري $S_d = \sqrt{\sum (d_i - \bar{d})^2 / (n-1)}$.

٢- صياغة الفروض:

الفرض البديل H_a	الفرض العدم H_o
$H_a : \mu_d \neq \mu_{do}$	$H_o : \mu_d = \mu_{do}$
$H_a : \mu_d > \mu_{do}$	$H_o : \mu_d = \mu_{do}$
$H_a : \mu_d < \mu_{do}$	$H_o : \mu_d = \mu_{do}$

٣- حساب إحصائية الاختبار.

$$t^* = \frac{\bar{d} - \mu_{do}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

٤- مناطق الرفض والقبول.

بتحديد مستوى المعنوية، ونوع اتجاه الفرض البديل يمكن استخراج القيمة الجدولية من توزيع t

عند درجات حرية $(n-1)$ ، ومن ثم يمكن تحديد مناطق الرفض والقبول.

٥- القرار.

إذا كانت $|t^*| > t_{(A, n-1)}$ نرفض فرض العدم، ونقبل الفرض البديل.

تطبيق { مثال (٢-٢) ص ٣٧ } .

باتباع نفس الخطوات المذكورة أعلاه، يمكننا إجراء الاختبار.

pair	عليقة (1)	عليقة (2)	$d=(2-1)$	d^2
1	30.51	36.32	5.81	33.7561
2	29.37	37.51	8.14	66.2596
3	28.72	35.47	6.75	45.5625
4	31.33	38.20	6.87	47.1969
5	31.56	36.52	4.96	24.6016
6	29.80	37.22	7.42	55.0564
7	30.50	38.95	8.45	71.4025
Sum			48.4	343.8356

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{48.4}{7} = 6.91$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{343.8356 - \frac{48.4^2}{7}}{6}} = 1.237$$

١- صياغة الفروض.

يود الباحث أن يوصي باستخدام العليقة الثانية لأنها تؤدي إلى زيادة في الوزن عن العليقة الأولى ، أي أن الباحث يريد إثبات أن :

$$H_a : \mu_d = (\mu_2 - \mu_1)_o > 0$$

ومن ثم يصاغ الفرض العدم والبديل كالتالي:

$$H_o : \mu_d = 0$$

$$H_a : \mu_d > 0$$

٢- إحصائية الاختبار.

$$t^* = \frac{\bar{d} - \mu_{do}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{6.91 - 0}{\left(\frac{1.237}{\sqrt{7}}\right)} = 14.8$$

٣- قيمة t الجدولية. ($\alpha = 0.05$)

$$t_{((1-\alpha), (n-1))} = t_{(0.95, 6)} = 1.943$$

٤- القرار.

بما أن $(t^* = 14.8) > (t_{(0.95, 6)} = 1.943)$ ، إذا نرفض فرض العدم ، ونقبل الفرض البديل،

ونوصي الباحث باستخدام العليقة الثانية، وذلك عند مستوى معنوية 5%.