اختبارات الفروض حول متوسط المجتمع μ

Hypotheses Tests About Population Mean (μ)

إن الغرض من اختبارات الفروض، هو وصول الباحث إلى قرار بخصوص فرض معين حول معلمة المجتمع، وما يجب أن يوصى به مع احتمال الوقوع في خطأ يحدده هذا الباحث. ويمكن إجراء ذلك من خلال معرفة توزيع معاينة المقدر Estimator الخاص بمعلمة المجتمع، ومن خلال هذا التوزيع يمكن تحديد مناطق رفض وقبول فرض العدم (وهو ما يود الباحث أن يثبت ضده) أسفل منحنى التوزيع .

- ***أنواع الفروض الإحصائية***

تنقسم الفروض إلى قسمين هما:

١- *الفرض البديل (البحثي):* H_a *Alternative Hypotheses* : وهو ما يود الباحث أن يثبت صحته، ويوصي به في كثير من الأحوال.

٢- *الفرض العدم:* H_o *Null Hypotheses* : وهو ما يود الباحث أن يثبت ضده

وهناك ثلاث اتجاهات لصياغة الفروض البديلة هي:

الفرض البديل (الباحث) H_a	***الفرض العدم*** H_0
$H_a : \mu \neq \mu_o$	$H_o : \mu = \mu_o$
$H_a : \mu \succ \mu_o$	$H_o : \mu \leq \mu_o$
$H_a : \mu \prec \mu_o$	$H_o : \mu \geq \mu_o$

حيث أن μ_o هو قيمة متوسط المجتمع تحت صحة الفرض العدم

ويلاحظ أن الفرض العدم مصاحب دائما بعلامة = ، لذا يمكن كتابة الفرض العدم

على الصورة: $H_o : \mu = \mu_o$

- ***القرارات التـي يمكن اتخاذها حول الفرض العدم*** H_0

هناك أربع احتمالات ممكنة حول الفرض العدم هي:

	الفرض العدم صحيح	*الفرض العدم غير صحيح*
رفض الفرض العدم H_0	α	$(1-\beta)$
قبول الفرض العدم H_0	$(1-\alpha)$	β

إذا الاحتمالات هي:

١- احتمال رفض الفرض العدم إذا كان صحيح (احتمال وقوع خطأ من النوع الأول)

$$P(reject\ H_o | H_o\ is\ correct) = \alpha$$

٢- احتمال قبول الفرض العدم إذا كان صحيح

$$P(accept\ H_o | H_o\ is\ correct) = (1-\alpha)$$

٣- احتمال قبول الفرض العدم إذا كان غير صحيح(احتمال وقوع خطأ من النوع الثاني)

$$P(accept\ H_o | H_o\ is\ uncorrected) = \beta$$

٤- احتمال رفض الفرض العدم إذا كان غير صحيح

$$P(reject\ H_o | H_o\ is\ uncorrected) = (1-\beta)$$

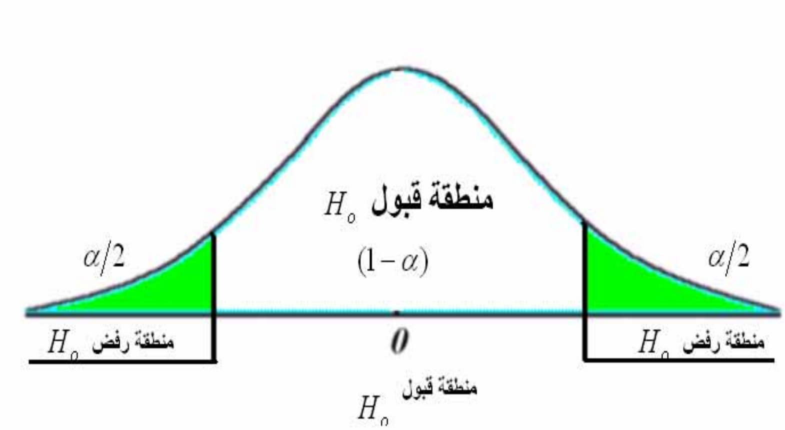
والخطأ من النوع الأول يمكن التحكم فيه، والذي يحدده الباحث قبل الاختبار ويطلق على احتمال وقوعه اسم " مستوى المعنوية (α)، وأغلب القيم المستخدمة هي *0.01 , 0.05*

- ***أنواع اختبارات الفروض***

هناك نوعان لاتجاهات الفروض، يتحدد نوع الاتجاه المستخدم بناء علي نوع الفرض البديل كما يلي:

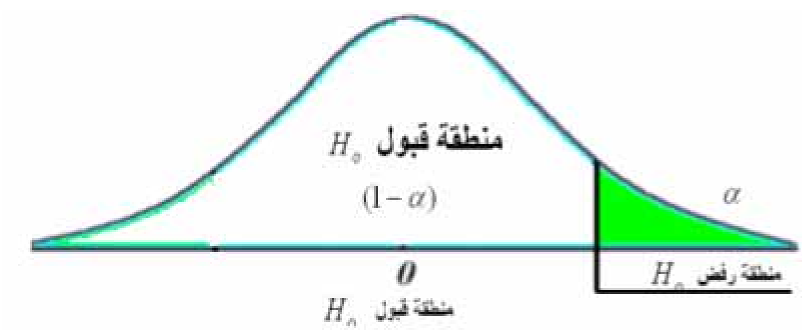
١- الاختبار في اتجاهين (إذا كان الفرض البديل $H_a : \mu \neq \mu_o$)

في هذه الحالة تقع منطقة الرفض في طرفي المنحنى.

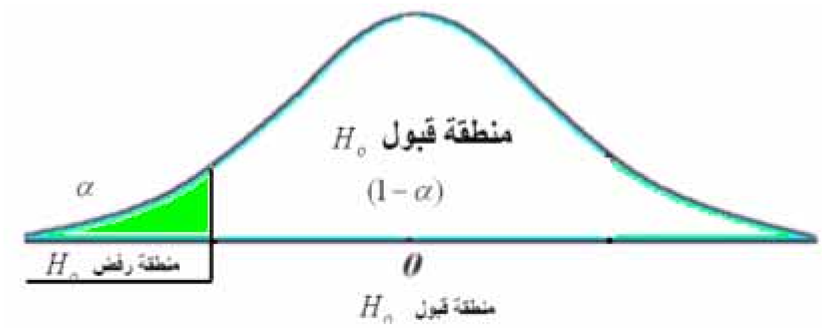


٢- الاختبار في اتجاه واحد، بمعني أن منطقة الرفض α تقع كلية في طرف المنحني الأيمن ، أو في الطرف الأيسر كما يلي:

- **إذا كان الفرض البديل: $H_a : \mu \succ \mu_o$ وقعت منطقة الرفض في الطرف الأيمن من المنحنى كما هو مبين في الشكل التالي:**



- **إذا كان الفرض البديل: $H_a : \mu \prec \mu_o$ وقعت منطقة الرفض في الطرف الأيسر من المنحنى كما هو مبين في الشكل التالي:**



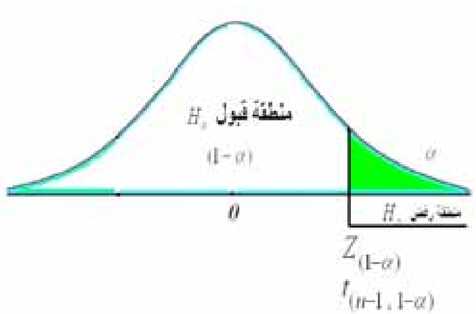
• خطوات إجراء اختبارات الفروض

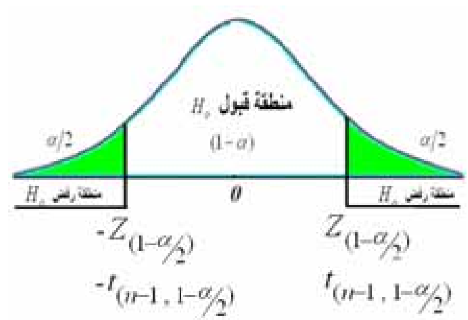
١- صياغة الفروض

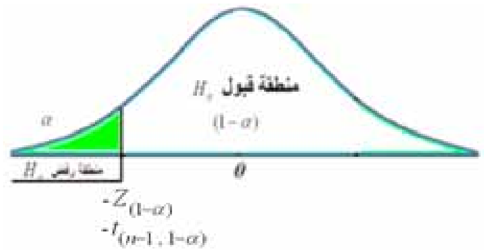
الفرض العدم H_0	الفرض البديل (الباحث) H_a
$H_o : \mu = \mu_o$	$H_a : \mu \neq \mu_o$
$H_o : \mu = \mu_o$	$H_a : \mu \succ \mu_o$
$H_o : \mu = \mu_o$	$H_a : \mu \prec \mu_o$

٢- تحديد مستوى المعنوية α، وتوزيع المعاينة، وتحديد مناطق الرفض والقبول.

توزيع المعاينة، إما توزيع طبيعي قياسي، أو توزيع t بدرجات حرية *(n-1)* ، ويتم استخراج القيم الحرجة من الجداول والتي تحدد مناطق الرفض والقبول كما هي مبينة في الرسم التالي :







٣- حساب إحصائية الاختبار.

باستخدام بيانات العينة، ومتوسط المجتمع تحت صحة الفرض العدم $H_O:\mu=\mu_O$ **، يمكن حساب قيمة تسمى "إحصائية الاختبار" أو القيمة المحسوبة ، وتتحدد حسب معلومية تباين المجتمع أو عدم معلوميته كما هو مبين بالجدول التالي:**

حجم العينة	إحصائية الاختبار (القيمة المحسوبة)	تباين المجتمع σ^2
لا يشترط حجم معين للعينة	$Z^*=\dfrac{(\bar{x}-\mu_o)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	معلوم
$n\leq 30$	$t^*=\dfrac{(\bar{x}-\mu_o)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	غير معلوم
$n>30$	$t^*\sim Z^*=\dfrac{(\bar{x}-\mu_o)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	

٤- اتخاذ القرار بخصوص الفرض العدم:

إذا وقعت القيمة المحسوبة (خطوة رقم ٣) في منطقة الرفض (خطوة رقم ٢) لا يمكن قبول الفرض العدم ونوصي بعدم رفض الفرض البديل، والعكس صحيح.

تطبيقات

تطبيق (١)

في إحدى شركات إنتاج عبوات عصائر المانجو حجم *1* لتر، كان إحدى مهام مدير الرقابة على الإنتاج متابعة الإنتاج، وإيقاف الإنتاج لضبط الآلات إذا كان حجم العبوة يختلف جوهريا عن *1* لتر، تم سحب عينة عشوائية من عبوات العصائر حجمها *16* عبوة، ووجد أن متوسط كمية العصير للعبوة *0.91* لتر، والانحراف المعياري لها *0.15* لتر ، إذا دلت الأبحاث أن كمية العصير تتبع توزيع طبيعي.

فهل يقوم المدير بوقف الإنتاج؟ إذا كان من الممكن أن يتحمل خطأ من النوع الأول احتماله $\alpha = 0.05$.

خطوات حل تطبيق (١)

البيانات المتاحة لدينا هي: $\mu_o = 1$ ، $n = 16$ ، $\bar{x} = 0.91$ ، $S = 0.15$ ، $\alpha = 0.05$

- *صياغة الفروض*

الفرض العدم: متوسط كمية العصير في العبوة تساوي *1* لتر (الآلة لا تحتاج إلى ضبط)

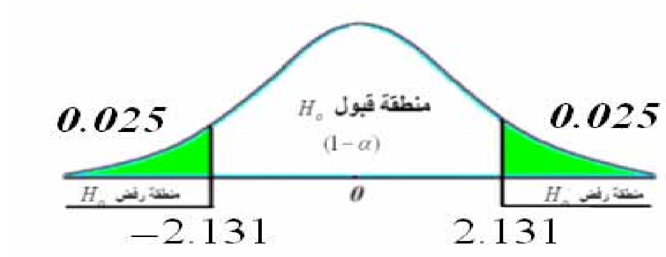
$$H_o : \mu = 1$$

الفرض البديل: متوسط كمية العصير في العبوة تختلف عن *1* لتر (الآلة تحتاج إلى ضبط)

$$H_a : \mu \neq 1$$

- مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

بما أن تباين المجتمع غير معلوم، وحجم العينة أقل من *30*، إذا توزيع المعاينة المستخدم هو توزيع *t* بدرجات حرية *(n-1)=16-1=(15)* ، وحيث أن الفرض البديل $H_a : \mu \neq 1$ ، تكون القيمة الحرجة هي : $t_{(15,0.975)} = \pm 2.131$ ، ومناطق الرفض والقبول مبينة في الرسم التالي :

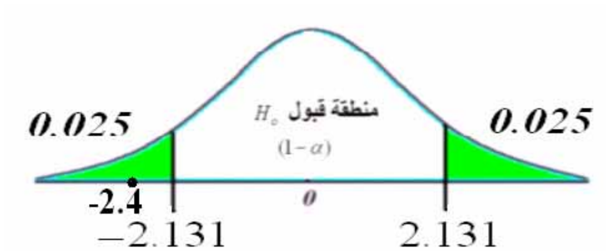


٥- إحصائية الاختبار.

$$t^* = \frac{(\bar{x}-\mu_o)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{(0.91-1)}{\frac{0.15}{\sqrt{16}}} = \frac{4(-0.09)}{0.15} = -2.4$$

٦- اتخاذ القرار:

بما أن القيمة المحسوبة $(t^* = -2.4)$ تقع في منطقة الرفض اليسرى



، لذا نوصي مدير المراقبة وقف الإنتاج وضبط الآلات، ويتحمل في ذلك خطأ من النوع الأول احتماله *0.05*.

تطبيق (٢)

يدعي أحد الأطباء أن من الآثار الجانبية لاستخدام عقار معين هو انخفاض ضغط الدم عن *(75)*، تم سحب عينة عشوائية حجمها *49* مريض، وتم قياس ضغط الدم بعد تعاطي هذا العقار، ووجد أن متوسط ضغط الدم في هذه العينة *65.5*، والانحراف المعياري لها *6.4*، فهل توافق هذا الطبيب في ادعائه، إذا كان مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ؟

خطوات حل التطبيق

البيانات المتاحة لدينا هي: $\mu_o = 75$ ، $n = 49$ ، $\bar{x} = 65.5$ ، $S = 6.4$ ، $\alpha = 0.05$

- ***صياغة الفروض***

الفرض العدم: استخدام العقار لا يؤدي إلى انخفاض الضغط

$$H_o : \mu = 75$$

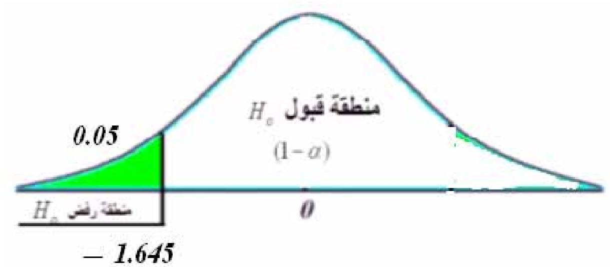
الفرض البديل: استخدام العقار يؤدي إلى انخفاض الضغط

$$H_a : \mu \prec 75$$

- **مستوى المعنوية** $\alpha = 0.05$.

بما أن تباين المجتمع غير معلوم، وحجم العينة أكبر من *30*، إذا توزيع المعاينة المستخدم هو توزيع طبيعي قياسي.

وحيث أن $H_a : \mu \prec 75$ **، تكون القيمة الحرجة هي:** $-Z_{(1-\alpha)} = -Z_{(1-0.05)} = -Z_{(0.95)} = -1.645$ **، ومناطق الرفض والقبول مبينة في الرسم التالي :**



٧- إحصائية الاختبار.

$$Z^* = \frac{(\overline{x} - \mu_o)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{(65.5 - 75)}{\frac{6.4}{\sqrt{49}}} = \frac{7(-4.5)}{6.4} = -4.92$$

٨- اتخاذ القرار:

بما أن القيمة المحسوبة $(Z^* = -4.92)$ **تقع في منطقة الرفض، ويستدل من ذلك أن ادعاء الطبيب صحيح، بمعنى أن تعاطي هذا العقار ينتج عنه انخفاض في ضغط الدم، لذا نوصي المريض باستخدام عقار آخر، وذلك عند مستوى معنوية *5%*.**