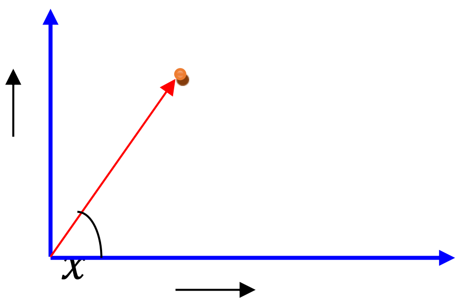
الحركة المنحنية Curvilinear motion:

الحركة المنحنية لنقطة ما هي حركة تلك النقطة على طول مسار منحني ، ويتم تعيين كل من السرعة والتعجيل لهذه النقطة بإحدى الطرق الثلاث الآتية:

أولاَ: طريقة المركبتين المتعامدتين (Rectangular Cartesian) Component



$\overline{\mathrm{op}} = \bar{r}$

$= \bar{\imath}x$

$+ \bar{\jmath}y$ $\quad position\ vectors$ متجه موضع النقطة على المنحني

$y = \mathrm{f}(x)$ المعادلة الكارتيزية للمسار

$x = f(t)$,

$y = f(t)$ المعادلات البارومترية للحركة

يمكن كتابة معادلة متجه السرعة كما يلي:

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\bar{\imath}x + \bar{\jmath}y) = \bar{\imath}\frac{dx}{dt} + \bar{\jmath}\frac{dy}{dt}$$

معادلة متجه السرعة $\bar{v} = v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath} = \dot{x}\bar{\imath} + \dot{y}\bar{\jmath}$

مركبة السرعة باتجاه x $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} = \dot{x}$

مركبة السرعة باتجاه y $v_\mathrm{y} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \dot{\mathrm{y}}$

مقدار السرعة $v =$

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

أما مقدار الزاوية التي يصنعها متجه السرعة مع محور x

فتكتب بالشكل التالي:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ويمكن كتابة معادلة متجه التعجيل كما يلي:

$$\bar{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\bar{\imath}v_x + \bar{\jmath}v_y) = \bar{\imath}\frac{dv_x}{dt} + \bar{\jmath}\frac{dv_y}{dt}$$

$$\bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath}$$

$$\bar{\mathrm{a}} = \bar{\mathrm{\imath}}\frac{d^2x}{dt^2} + \bar{\mathrm{\jmath}}\frac{d^2\mathrm{y}}{dt^2} = \bar{\imath}\ddot{x} + \bar{\mathrm{\jmath}}\ddot{\mathrm{y}}$$ معادلة متجه التعجيل

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$ مركبة التعجيل باتجاه x

$$a_\mathrm{y} = \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{y}}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2\mathrm{y}}{dt^2} = \ddot{\mathrm{y}}$$ مركبة التعجيل باتجاه y

مقدار التعجيل $a =$

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

مثال: يتحرك جسيم على مسار منحني حيث متجه موضعه يكتب بالشكل التالي $\bar{r} = 20t\bar{\imath} + (12t - 5t^2)\bar{\jmath}$ أوجد المعادلة الكرتيزية للمسار وسرعة وتعجيل الجسيم الابتدائيتين وسرعة الجسم بعد مرور 10 sec .

$$x = 20\,t \qquad , \qquad y = 12\,t - 5t^2$$

$$\because t = \frac{x}{20} \implies y = 12\left(\frac{x}{20}\right) - 5\left(\frac{x}{20}\right)^2$$

$y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{80}x^2$ المعادلة الكرتيزية للمسار

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[20t\bar{\imath} + (12t - 5t^2)\bar{\jmath}\right]$$

$$\bar{v} = 20\bar{\imath} + (12 - 10t)\bar{\jmath}$$

$$at \quad t = 0 \quad \implies \bar{v} = 20\bar{\imath} + 12\bar{\jmath}$$

$$t = 0 \implies a = \frac{dv}{dt}$$

$= -10\bar{\jmath}$ التعجيل ثابت بالمقدار بالاتجاه السالب لمحور y

$$\text{at } \; t = 10 \text{ sec} \;\Longrightarrow\; \bar{v} = 20\bar{\imath} + (12 - 100)\bar{\jmath} = 20\bar{\imath} - 88\bar{\jmath}$$

$$v = \sqrt{(20)^2 + (-88)^2} = 90.24\, m/s$$

ثانياَ: طريقة الأحداثيات القطبية Polar Components:

يمكن تحديد موضع الجسيم المتحرك في مستوي بطريقة الأحداثيات القطبية (r, θ)

يرمز لوحدة المتجه الواقعة على طول تزايد المتجه $(\,\bar{r}\,)$ بالرمز $(\,\bar{r}_1\,)$

بينما يرمز لوحدة المتجه باتجاه تزايد الزاوية $(\,\theta\,)$ والتي تكون عمودية على $(\,\bar{r}_1\,)$ بالرمز $(\,\bar{\theta}_1\,)$

y $\bar{r}_1$

$\bar{\theta}_1$

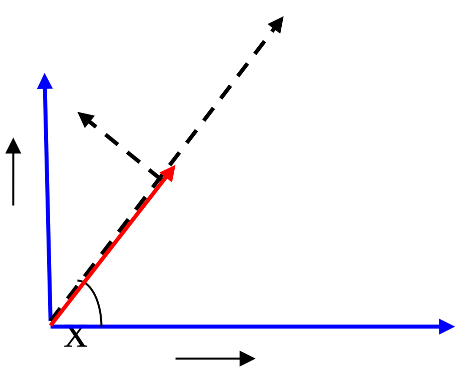
$\bar{\jmath}$ $(\,r\,,\theta\,)$

$\bar{r}$

θ

o

$\bar{\imath}$



يمكن كتابة المعادلة الاتجاهية للسرعة بالإحداثيات القطبية كما يلي:

$$\bar{v} = \bar{r}_1 v_r + \bar{\theta}_1 v_\theta$$

$$v_r = \frac{dr}{\mathrm{dt}} = \dot{r} \quad radial\ velocity$$ السرعة القطرية

$$v_\theta = r\omega = \mathrm{r}\frac{d\theta}{\mathrm{dt}}$$
$$= \mathrm{r}\,\dot{\theta} \qquad tangential\ velocity$$ السرعة المماسية

$$\bar{v}$$
$$= \bar{r}_1 \dot{r}$$
$$+ \bar{\theta}_1 r\dot{\theta}$$ المعادلة الاتجاهية للسرعة بالاحداثيات القطبية

ويمكن كتابة المعادلة الاتجاهية للتعجيل بالإحداثيات القطبية كما يلي :

$$\bar{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{dt}} = \bar{r}_1 a_r + \bar{\theta}_1 a_\theta$$

$$a_r = \ radial\ acceleration$$ التعجيل القطري

$$a_\theta$$
$$= \ tangential\ \ acceleration$$ التعجيل المماسي

ثالثاَ: طريقة المركبات الطبيعية (الاعتيادية) *Normal Components*:

تعتبر هذه الطريقة مناسبة لإيجاد سرعة الجسيم على منحني عندما يكون شكل المسار معلوم.

ويمكن كتابة المعادلة الاتجاهية للتعجيل بالإحداثيات الطبيعية كما يلي :

$$\bar{a} = \bar{T}a_t + \bar{N}a_n$$

حيث $\bar{T}$: وحدة المتجه باتجاه المماس ، $\bar{N}$: وحدة المتجه باتجاه العمود على المماس

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2S}{dt^2}$$

مركبة التعجيل المماسية $a_t = \frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt} = v.\frac{dv}{ds}$

مركبة التعجيل العمودية $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

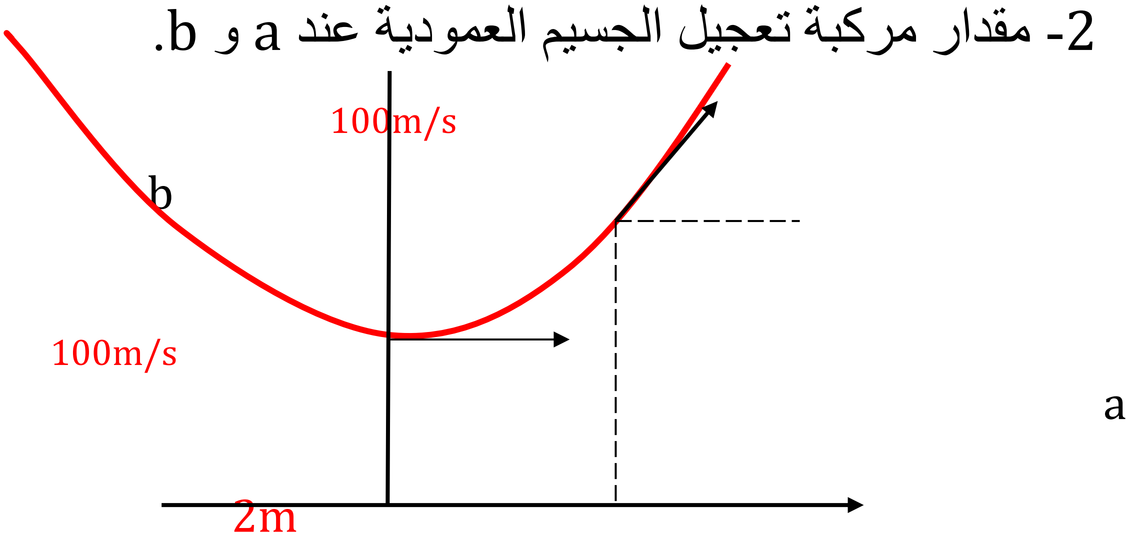
ρ: نصف قطر الانحناء التقوسي $\rho = \frac{ds}{d\theta}$ حيث θ: زاوية ميل المماس

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

مثال: يتحرك جسيم بسرعة $100m/s$ على طول طريق على شكل قطع مكافئ يعطى بالعلاقة $y = 5 + 0.3x^2$ كما في الشكل أدناه أوجد:

1- مركبتي السرعة باتجاهي x و y عند النقطتين a و b .

2- مقدار مركبة تعجيل الجسيم العمودية عند a و b.



1- $at\ (a) \implies v_x = 100 m/s \quad , \quad v_y = 0$

$at\ (b) \implies v_x$
$= v_o \cos\theta \quad , \; v_y = v_o \sin\theta$

$v_o = 100 m/s \quad , \; \theta = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$

$y = 5 + 0.3x^2 \implies \frac{dy}{dx} = 0.6\,x \implies \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$
$= 0.6 \times 2 = 1.2$

$\theta = \tan^{-1}(1.2) = 50.2^{o}$

$v_x = 100\cos 50.2 = 64\,\frac{m}{s}$

$v_y = 100\sin 50.2^{o} = 76.8\,\frac{m}{s}$

2- $at\ (a) \quad a_n =$
$\frac{v^2}{\rho}$ مركبة تعجيل الجسيم العمودية عند النقطة(a)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

at (a) $\Longrightarrow$ $x = 0$ $\Longrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 0.6\,x$ $\Longrightarrow$
$\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0.6$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm 0.6}{[1+0]^{\frac{3}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad \rho_a = 1.67\,m$$

$$\Longrightarrow \quad a_{n_a} = \frac{v^2}{\rho_a} = \frac{(100)^2}{1.67} = 5990\,m/s^2$$

at (b): $x = 2$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = 0.6\,x$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dx}$

$$= 1.2 \quad , \frac{d^2y}{dx^2} = 0.6$$

$$\frac{1}{\rho_{\mathrm{b}}} = \frac{\pm 0.6}{[1+(1.2)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm 0.6}{[1+1.44]^{\frac{3}{2}}}$$

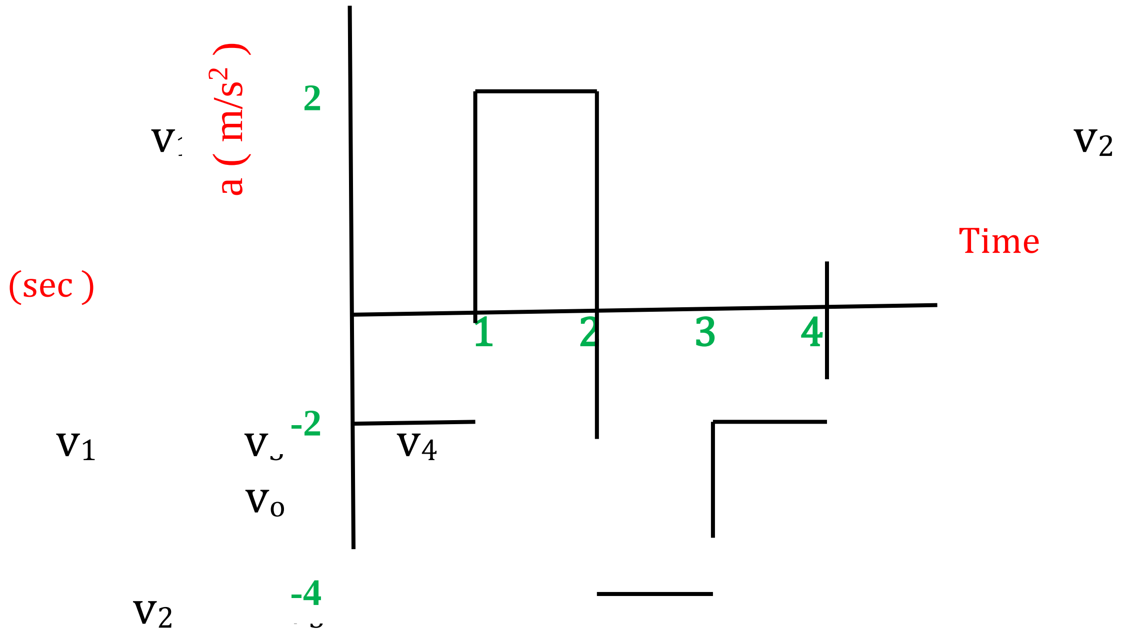
$$\Longrightarrow \quad \frac{\pm 0.6}{\sqrt{(2.44)^3}} \quad \Longrightarrow \rho_{\mathrm{b}} = 6.35\,m$$

$$\Longrightarrow \quad a_{n_b} = \frac{(100)^2}{6.35} = 1570\,m/s^2$$

تمارين عـــامة

مثال 1: في الشكل أدناه مخطط تعجيل جسيم يتحرك حركة انتقالية مستقيمة بسرعة ابتدائية 3m/s أوجد الإزاحة والسرعة في الفترات الزمنية التالية:

$t_{1(0\longrightarrow 1s)}$, $t_{2(1\longrightarrow 2s)}$, $t_{3(2\longrightarrow 3s)}$, $t_{4(3\longrightarrow 4s)}$



$$v_o = 3m/s\ , \qquad s_o = 0\ ,$$
$$a_1 = -2m/s^2\ ,$$

$$a_2 = 2m/s^2\ ,\ \ a_3 = -4m/s^2\ ,$$
$$a_4 = -2m/s^2$$

$$t_{1(0\longrightarrow 1s)}:\quad a_1=\frac{v_1-v_o}{t_1-t_o}\implies -2$$

$$=\frac{v_1-3}{1-0}\implies v_1=1m/s$$

$$S_1=S_O+v_ot+\frac{1}{2}at^2\implies S_1$$

$$=0+3+\frac{1}{2}(-2)=2m$$

$$t_{2(1\longrightarrow 2s)}:\ a_2=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\implies 2=\frac{v_2-1}{2-1}\implies v_2=3m/s$$

$$S_2=S_1+v_1t+\frac{1}{2}a_2t^2\implies S_2$$

$$=2+1+\frac{1}{2}(2)=4m$$

$$t_{3(2\longrightarrow 3s)}:a_3=\frac{v_3-v_2}{t_3-t_2}\implies -4=\frac{v_3-3}{2-1}$$

$$\implies v_3=-1m/s$$

$$S_3=S_2+v_2t+\frac{1}{2}a_3t^2\implies S_3$$

$$=4+3+\frac{1}{2}(-4)=5m$$

$$t_{4(3\longrightarrow 4s)}: a_4=\frac{v_4-v_3}{t_4-t_3} \implies -2=\frac{v_4+1}{2-1}$$

$$\implies v_4=-3m/s$$

$$S_4=S_3+v_3t+\frac{1}{2}a_4t^2 \implies S_4$$

$$=5-1+\frac{1}{2}(-2)=3m$$

مثال:2 يتحرك جسيم بسرعة ثابتة 5m/s على طول طريق بشكل قطع مكافئ معادلته $y=x^2$ احسب مقدار المركبتين المماسية والعمودية للتعجيل عند النقطة (1 , 1).

$$\because v=constant \implies a_t=\frac{dv}{dt}=0$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \quad , \quad \frac{1}{\rho}=\frac{\pm\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \implies a_n$$

$$=\frac{\pm v^2\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2\right)^3}}$$

$$\text{at} \quad x = 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2\,x = 2 \qquad , \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$$a_n = \frac{\pm 5^2 \times 2}{\sqrt{(1 + (2)^2)^3}} = \pm 2\sqrt{5}$$

مثال:3. تتحرك قذيفة على مسار منحني قطع مكافئ بأقصى مدى فاذا كانت معادلتي الحركة للقذيفة هما $x = v_o t \cos\theta_o \,, \quad y = v_o t\, sin\theta_o - \frac{1}{2} g t^2$ جـــد:

1- معادلة الحركة بالإحداثيات المتعامدة (المعادلة الكرتيزية للمسار)

2- المعادلات البارومترية للحركة عندما تكون السرعة الابتدائية $150 m/s$

3- سرعة واتجاه القذيفة بعد مرور 5sec .

$$1. \quad x = v_o t \cos\theta_o \Longrightarrow t = \frac{x}{v_o \cos\theta_o}$$

$$y = v_o \frac{x}{v_o \cos\theta_o} \, sin\theta_o - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_o \cos\theta_o}\right)^2$$

$$y = x\, tan\theta_o - \frac{g x^2}{2 {v_o}^2 \cos{\theta_o}^2}$$ المعادلة الكرتيزية للمسار

2. $x = 150t\cos 45 = 106\, t$

$$y = 150t\ sin45 - \frac{1}{2} \times 9.8t^2 = 106\, t - 4.9t^2$$

3. $x = 106\,\mathrm{t} \quad \Longrightarrow \quad v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} = 106\, m/s$

$$y = 106\, t - 4.9t^2 \quad \Longrightarrow \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}$$

$$= 106 - 9.8\mathrm{t}$$

$$at\ \ t = 5\,\mathrm{sec} \quad \Longrightarrow \quad v_y = 106 - 9.8 \times 5$$

$$= 57\mathrm{m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{(106)^2 + (57)^2 =} 120.35\, m/s$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{57}{106} = 28.26^o$$

واجب:

مثال: يتحرك جسيم بسرعة $v = t^2 + 3$ على طول طريق بشكل قطع مكافئ معادلته $y(1) = x^2$ احسب مقدار المركبتين المماسية والعمودية للتعجيل.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2t$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad , \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\pm \frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow \quad a_n$$

$$= \frac{\pm v^2 \frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^3}}$$

$v = t^2 + 3 \quad , \qquad$ at $\quad \mathrm{t} = 0 \Longrightarrow v = 3m/s$

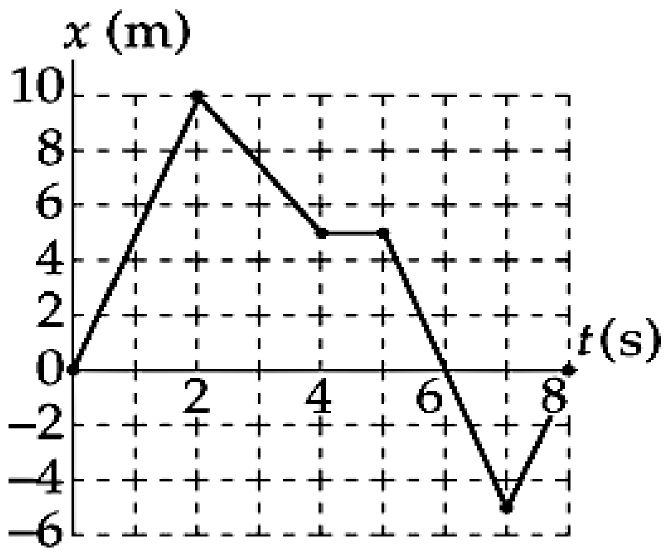
at $\quad x = 1 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\,x = 2 \qquad , \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$

$$a_n = \frac{\pm 3^2 \times 2}{\sqrt{(1 + (2)^2)^3}} = \frac{\pm 18}{\sqrt{125}} = \frac{\pm 18}{5\sqrt{5}} = 1.61$$
m/s^2

واجب: الشكل أدناه يمثل العلاقة بين الازاحة والزمن لجسيم يتحرك على طول المحور x أوجد:

1- متوسط السرعة في الفترات الزمنية التالية:- 0-2sec , 2-4sec , 4-5sec , 5-7sec , 7-8sec

2- ارسم مخطط السرعة في الفترة الزمنية من t=o إلى t= 8 sec

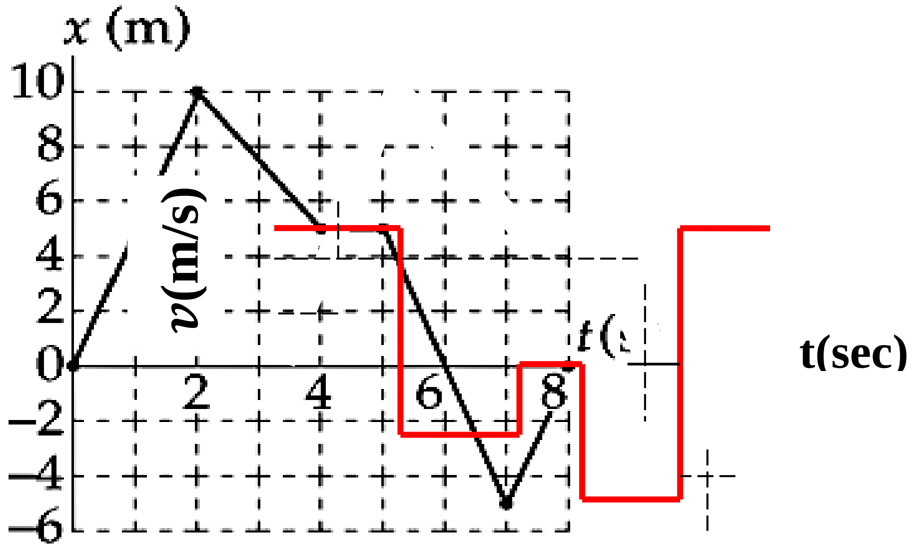


$$1 - v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \qquad \Longrightarrow \quad v_{0\to 2s} = \frac{10-0}{2-0}$$

$$= 5\, m/s$$

$$v_{2\to 4s} = \frac{5-10}{4-2} = -2.5\, m/s \qquad , v_{4\to 5s} = 0$$

$$v_{5\to 7s} = \frac{-5-5}{7-5} = -5\ m/s \quad , v_{7\to 8s} = \frac{0-(-5)}{8-7} = 5\ m/s$$



مخطط السرعة- زمن