الزوايا (The Angles)

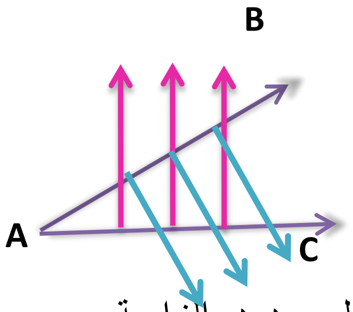
تعـريـــف :- إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين مختلفين لا يقعان على مستقيم واحد ولهما نقطة بداية مشتركة A فأن إتحاد هذين الشعاعين مع النقطة A تسمى زاوية .

النقطة A تسمى رأس الزاوية و نرمز للزاوية بالرمز $\sphericalangle BAC$ أو $\sphericalangle CAB$ أو $\sphericalangle A$ ، الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ يمثلان ضلعا الزاوية.

مبرهنة (32) :- إذا كان $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ شعاعين ليس على استقامة واحدة وكانت $B' \in \overrightarrow{AB}$ ، $C' \in \overrightarrow{AC}$

فأن $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC' = \sphericalangle B'AC = \sphericalangle BAC'$

تعريف: داخل الزاوية $BAC \sphericalangle$ هو تقاطع جهة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ التي تحوي النقطة B وجهة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ التي تحوي النقطة C.



خارج الزاوية هو مجموعة كل النقاط التي لا تقع في داخل الزاوية ولا على حدود الزاوية.

مبرهنة (**):

١ -يوجد للزاوية رأس واحد فقط.
٢ -داخل الزاوية هو مجموعة غير خالية.
٣ -داخل الزاوية هو مجموعة محدبة.

واجب

مــبرهنــة(33) : إذا كانت D نقطة في داخل $BAC>$ فان كل نقطة على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تكون داخلية للزاوية $BAC \sphericalangle$ (تقع في داخل $BAC \sphericalangle$) .

البرهان:- نفرض $X \in \overrightarrow{AD}$

∵ D نقطة داخلية للزاوية $\sphericalangle BAC$ (من الفرض)

∴ D تقع على جهة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ التي تحوي C وتقع على جهة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ التي تحوي B

من مبرهنة (6 ،26) جميع نقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع على جهة واحدة من $\overrightarrow{AB}$ ومن ضمنها النقطتين X ,D

∵ C , D تقع على جهة واحدة من الشعاع $\overrightarrow{AB}$

∴ مبرهنة (3، 27) C , X تقع على جهة واحدة من الشعاع $\overrightarrow{AB}$

∴ X تقع على جهة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ التي تحوي C

وبنفس الطريقة نبرهن أن النقطة X تقع على جهة واحدة من الشعاع $\overrightarrow{AC}$ التي تحوي B

∴ x تقع داخل الزاوية $\measuredangle$ BAC

∴ كل نقطة على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تكون داخلية للزاوية $\measuredangle$ BAC

مبرهنة (34) :- في الزاوية $\measuredangle$BAC إذا كانت P,Q نقطتين مختلفتين واقعتين على الضلعين $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ على التوالي فأن كل نقطة R على الخط PQ تكون داخلية للزاوية $\measuredangle$ BAC إذا وفقط إذا [PRQ] **(واجب)**

مبرهنة (35) :- إذا كانت D نقطة داخلية للزاوية $\measuredangle$ BAC فأن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقطع قطعة المستقيم $\overline{BC}$.

تعــريــف :- في الزاوية $\measuredangle$ BAC يقال أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ إذا وفقط إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AD}$ داخل الزاوية $\measuredangle$ BAC

مبرهنة (36):- الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ إذا وفقط إذا وجدت نقاط D′ , C′ , B′ تقع على $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ على التوالي بحيث [B′D′C′] .

البرهان:- $\Longleftarrow$

نفرض إن $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ $\longrightarrow$ $\overrightarrow{AD}$ يقع داخل الزاوية $\measuredangle$ BAC (تعريـف)

(من بديهية 9) توجد نقطة مثل $B' \in \overrightarrow{AB}$ و $C' \in \overrightarrow{AC}$

$\longleftarrow$ $\measuredangle$ BAC = $\measuredangle$ B′AC′ (مبرهنة 32)

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{AD}$ داخل الزاوية $\measuredangle$ B′AC′ (تعريـف)

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{AD}$ يقطع $\overline{B'C'}$ في نقطة مثل D' (مبرهنة 35)

$\longleftarrow [B'D'C']$ (مبرهنة 34)

$\Longrightarrow$

نفرض إن $B' \in \overrightarrow{AB}$, $C' \in \overrightarrow{AC}$, $D' \in \overrightarrow{AD}$ بحيث $[B'D'C']$.

$\therefore$ D' نقطة داخلية للزاوية $\measuredangle BAC$ (مبرهنة 34)

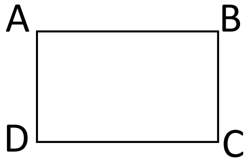
$\because$ $D' \in \overrightarrow{AD}$ $\longleftarrow$ كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع داخل الزاوية $\measuredangle BAC$ (مبرهنة 33)

$\longleftarrow$ الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$

مبرهنة (37): إذا كان الشعاع $\overrightarrow{OB}$ بين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ وان $\overrightarrow{OD}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{OA}$ فان $\overrightarrow{OC}$ يقع بين $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$. **(واجب)**

<u>الشكل الرباعي المحدب :-</u>

إذا كان D, C, B, A أربعة نقاط بحيث لا توجد أي ثلاث نقاط منها على استقامة واحدة فالمجموعة المتكونة من اتحاد النقاط D, C, B, A مع قطع المستقيمات $\overline{AD}, \overline{CD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ تسمى **شكل رباعي (رباعي الإضلاع)** ، وتسمى النقاط D, C, B, A رؤوس الشكل الرباعي وتسمى المستقيمات $\overline{AD}, \overline{CD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ أضلاع الشكل الرباعي .



<u>تعــــاريــف</u> :-

1) يقال عن ضلعين في شكل رباعي بأنهما متجاورين في نقطة واحدة والضلعين الغير متجاورين هما متقابلين.

2) زاوية الشكل الرباعي هي الزاوية التي ضلعاها ضلعين متجاورين في الشكل الرباعي .

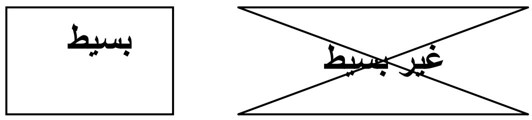
3) يقال عن زاويتين في الشكل الرباعي بأنهما متجاورتين إذا اشتركتا بضلع من الإضلاع . وفي الشكل الرباعي الزاويتين غير المتجاورتين متقابلتين .

4) يقال عن رأسي في الشكل رباعي بأنهما متجاورين إذا كانا رأسي لزاويتين متجاورتين والرأسين المتقابلين هما الرأسي الغير متجاورين .

5) قطر الشكل الرباعي هو قطعة المستقيم الواصلة بين رأسين متقابلين .

تعريف :- يقال عن الشكل الرباعي بأنه محدب إذا كان لأي رأسين متجاورين في رؤوسه فأن الرؤوس الغير واقعة على الضلع المشترك تكون على جهة واحدة من خط ضلع هذين الرأسين .

تعريف :- الشكل الرباعي البسيط هو الذي لا يتقاطع فيه ضلعان و غير البسيط هو الذي يتقاطع فية ضلعان.



تعريف :- داخل رباعي الإضلاع المحدب (الشكل الرباعي محدب) هو تقاطع المجموعات التالية:

١ -جهة الخط AB التي تحتوي D, C
٢ جهة الخط BC التي تحتوي D, A
٣ جهة الخط CD التي تحتوي B, A
٤ جهة الخط AD التي تحتوي B, C

مبرهنة (***): داخل الشكل الرباعي محدب (رباعي الإضلاع المحدب) يكون مجموعة محدبة . **(واجب)**

<u>التطابق والمقارنة :-</u>

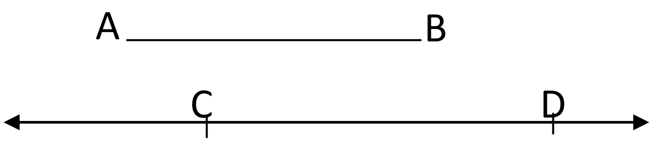
بديهيات التطابق بالنسبة لقطعة المستقيم :-

كلمة تطابق من الكلمات الأولية الغير معروفة حيث إن كل المعروف عنها أنها تستخدم للمقارنة فيقال إن شكلا يطابق شكلا أخر للدلالة على أنهما يحملان نفس الخواص والصفات وسوف نستخدم الرمز ($\cong$) للدلالة على التطابق والرمز ($\ncong$) للدلالة على عدم التطابق .

بما إن التطابق هو علاقة أولية ، يجب أن نقدم بديهيات لتعطينا خواص هذه العلاقة .

بديهية (1) (بـنــــاء(إنشاء) قطعــة المستقيــم) :-

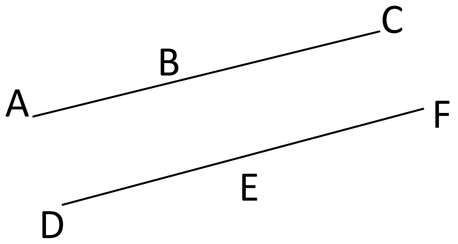
إذا كانت $\overline{AB}$ قطعة مستقيم و C نقطة على خط مستقيم مثل m فأنهُ كل شعاع على الخط m ومصدرهُ النقطة C توجد نقطة واحدة فقط مثل D بحيث أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



بديهية (2) :- بالنسبة لقطع المستقيمات علاقة التطابق ($\cong$) هي علاقة تكافؤ .

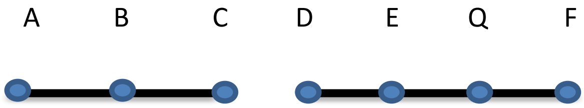
نستنتج من هذه البديهية أن كل قطعة تطابق نفسها . وإذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية فإن الثانية تطابق الأولى. وإذا كانت القطعة الاولى تطابق قطعة ثانية والقطعة الثانية تطابق قطعة ثالثة فإنه الأولى تطابق الثالثة.

بديهية (3) : (إضافة (جمع) قطعــة مستقيــم) :- إذا كان



a) [ABC] و [DEF]

b) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ فأنه $\overline{AC} \cong \overline{DF}$



مبرهنة (38) :- (طــرح القطــع)

إذا كان [ABC] و [DEF] و $AB \cong DE$ و $AC \cong DF$ فأنه $BC \cong EF$

البرهان :- نفرض $\overline{BC} \ncong \overline{EF}$

من بديهية (1) توجد نقطة مثل Q بحيث أن

$Q \neq F \leftarrow \overline{EQ} \ncong \overline{EF} \leftarrow \overline{BC} \cong \overline{EQ}$

∵ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ و $\overline{BC} \cong \overline{EQ}$

∴ حسب بديهية (3) $AC \cong DQ$

∵ $Q = F \leftarrow DQ \cong DF \leftarrow AC \cong DF$

وهذا تناقض مع الفرض

∴ $BC \cong EF$.

مبرهنة (39) :- إذا كانت $AC \cong DF$ و B نقطة بحيث أن [ABC] فأنه توجد نقطة مثل E بحيث أن $AB \cong DE$ و [DEF] . **(واجب)**

مقــارنـــة قــطــع المستقيـــم :-

تعــريـــف :- تكون قطعة المستقيم $\overline{AB}$ أقل من قطعة المستقيم $\overline{CD}$ إذا وفقط اذا وجدت نقطة مثل E بحيث أن [CED] وكذلك $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

[$AB < CD \longleftarrow$ يوجد E على CD بحيث $AB \cong CE$]

مبرهنة (40) :- إذا كانت $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطع مستقيم فأنه احد احتمالات التالية متحقق

$\overline{AB} < \overline{CD} \vee \overline{CD} < \overline{AB} \vee \overline{AB} \cong \overline{CD}$ **(واجب)**

مبرهنة (41) :- إذا كانت $AB < CD$ و $AB \cong EF$ فأنه $EF < CD$

البرهان :- حسب تعريف (مقارنة القطع بما ان $A\text{-}B < C\text{-}D$ بالفرض

فانه توجد نقطة G بحيث إن C-G-D و $A-B\cong C-G$
بما ان $A-B\cong E-F$
حسب بديهية (2) متعدية : $E-F\cong C-G$
حسب تعريف مقارنة القطع $E-F<C-D$.

مبرهنة (42) :- إذا كانت $AB < CD$ و EF CD فأنه $AB < EF$

مبرهنة (43) :- إذا كانت $AB < CD$ و $CD < EF$ فأن $AB < EF$

(واجب)