المصفوفات – أشكالها والعمليات عليها

1 . تعريف المصفوفة:

هي مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية متوضعة ضمن جدول مستطيل أو مربع على شكل أسطر وأعمدة. فالشكل العام للمصفوفة هو:

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ونقول عن المصفوفة السابقة $A_{(m,n)}$. بأنها من المرتبة $m * n$.

-2- أشكال المصفوفات:

يمكن التمييز بين عدة أشكال للمصفوفات بحسب عدد الأسطر وعدد الأعمدة وبحسب عناصر المصفوفة. وهذه الأشكال هي:

المصفوفة المستطيلة– المصفوفة المربعة:الشكل العام للمصفوفة المربعة هو:

$$S_{(n,n)} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2j} & \dots & s_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{ij} & \dots & s_{in} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nj} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

1. **المصفوفة الصفرية (المعدومة):** هي مصفوفة كافة عناصرها أصفار. إذن فالشكل العام لها هو:

$$O_{(m,n)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

2. المصفوفة العمود والمصفوفة السطر[1]:

مصفوفة السطر:

حينما نجعل $m=1$ في المصفوفة $A_{(m,n)}$ فيمكن اعتبار المصفوفة $A_{(m,n)}$ شعاع سطر (مصفوفة السطر)، على الشكل التالي:

$$A_{(1,n)}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_j & \dots & a_n\end{bmatrix}$$

مصفوفة العمود:

حينما نجعل $n=1$ في المصفوفة $A_{(m,n)}$ فيمكن اعتبار المصفوفة $A_{(m,n)}$ شعاع عمود (مصفوفة العمود) على النحو التالي:

$$A_{(m,1)}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \dots\\ a_i\\ \dots\\ a_m\end{bmatrix}$$

3. المصفوفة الأحادية (الواحدة):

شكلها العام كما يلي:

$$I_{(n,n)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

. هناك لكل مصفوفة مربعة مهما كانت مرتبتها مصفوفة أحادية مقابلة لها

4. المصفوفة القطرية:

الشكل العام للمصفوفة القطرية من المرتبة n هو:

$$D_{(n,n)} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

الشكل العام لهذه المصفوفة العددية هو:

$$B_{(n,n)} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{bmatrix}$$

7. المصفوفة المثلثية العليا: الشكل العام لهذه المصفوفة هو:

$$T_{(n,n)} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

8. المصفوفة المثلثية الدنيا:

الشكل العام لهذه المصفوفة هو:

$$T_{(n,n)} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

9. المصفوفة الماركوفية:

هي مصفوفة1 – مربعة 2– كل عنصر فيها موجب أو معدوم، 3– كما أن حاصل جمع عناصر أي عمود من أعمدتها يساوي الواحد. فإذا رمزنا لهذه المصفوفة بالرمز $M = (m_{ij})$ فإن:

$$\forall j : \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1 , \quad \forall i, j : m_{ij} \geq 0 ,$$

مثال (1):

$$M_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.1 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. المصفوفة المتناظرة (المتماثلة):

هي مصفوفة مربعة كل عنصرين متقابلين بالنسبة للقطر الرئيسي فيها متساويان. أي أن $x_{ij} = x_{ji}$ مهما تكن i,j $(i,j = 1, 2, \dots, n)$.

مثال (2): المصفوفتان التاليتان كل منهما مصفوفة متناظرة:

$$S_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} , \quad S_{(5,5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

يمكن اعتبار كل من المصفوفة القطرية والمصفوفة الواحدية مصفوفة متناظرة.

11. المصفوفة متعاكسة التناظر (المتقابلة):

هي مصفوفة مربعة كل عنصرين متقابلين بالنسبة للقطر الرئيسي فيها متساويان بالقيمة المطلقة ومختلفان بالإشارة. أي أن $x_{ij} = - x_{ji}$ مهما تكن i,j $(i,j = 1, 2, \dots, n)$.

مثال (3):

المصفوفتان التاليتان كل منهما مصفوفة متعاكسة التناظر:

$$A_{(3,3)}=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&-3\\-2&3&0\end{bmatrix}\ ,\ A_{(4,4)}=\begin{bmatrix}0&-2&1&-5\\2&0&-4&9\\-1&4&0&-7\\5&-9&7&0\end{bmatrix}$$

12. المصفوفتان المتساويتان:

نقول عن المصفوفتين $X_{(m,n)}, Y_{(m,n)}$ إنهما متساويتان إذا كان لهما نفس المرتبة (أي نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة) وكان كل عنصر في المصفوفة الأولى مساوياً العنصر المقابل له في المصفوفة الثانية. إذن:

$$X_{(m,n)}=Y_{(m,n)} \Leftrightarrow \forall\ x_{ij}\in X_{(m,n)}\ ,y_{ij}\in Y_{(m,n)}\ :\ x_{ij}=y_{ij}$$

حيث: $i=1,2,.....m$ و $j=1,2,.....n$.

3 . العمليات على المصفوفات:

نقصد بالعمليات على المصفوفات عمليات الجمع، الطرح، الضرب، التدوير.

جمع المصفوفات:

يشترط في عملية جمع مصفوفتين أن يكون لهما نفس المرتبة. ونحصل على مجموع مصفوفتين بجمع كل عنصر من المصفوفة الأولى مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة الثانية. فإذا كان لدينا المصفوفتان $X_{(m,n)}$ $X_{(m,n)}$:

$$X_{(m,n)}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1j}&\cdots&x_{1n}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2j}&\cdots&x_{2n}\\\vdots&&&&&\\x_{i1}&x_{i2}&\cdots&x_{ij}&\cdots&x_{in}\\\vdots&&&&&\\x_{m1}&x_{m2}&\cdots&x_{mj}&\cdots&x_{mn}\end{bmatrix},\quad Y_{(m,n)}=\begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}&\cdots&y_{1j}&\cdots&y_{1n}\\y_{21}&y_{22}&\cdots&y_{2j}&\cdots&y_{2n}\\\vdots&&&&&\\y_{i1}&y_{i2}&\cdots&y_{ij}&\cdots&y_{in}\\\vdots&&&&&\\y_{m1}&y_{m2}&\cdots&y_{mj}&\cdots&y_{mn}\end{bmatrix}$$

اللتان لهما نفس المرتبة فإن حاصل جمع المصفوفتين $X_{(m,n)}+Y_{(m,n)}$ ، ولنرمز له بـ $Z_{(m,n)}$ ، نحصل عليه بأن نجمع كل عنصر من المصفوفة $X_{(m,n)}$ مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة $Y_{(m,n)}$ فنجد:

$$X_{(m,n)}+Y_{(m,n)}=Z_{(m,n)}=\begin{bmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & \cdots & x_{1j}+y_{1j} & \cdots & x_{1n}+y_{1n} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} & \cdots & x_{2j}+y_{2j} & \cdots & x_{2n}+y_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots \\ x_{i1}+y_{i1} & x_{i2}+y_{i2} & \cdots & x_{ij}+y_{ij} & \cdots & x_{in}+y_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots \\ x_{m1}+y_{m1} & x_{m2}+y_{m2} & \cdots & x_{mj}+y_{mj} & \cdots & x_{mn}+y_{mn} \end{bmatrix}$$

وتتمتع عملية جمع المصفوفات بالخواص التالية:

1 . عملية الجمع تبديلية− عملية الجمع تجميعية− عملية جمع المصفوفات لها عنصر حيادي− في جمع المصفوفات لكل مصفوفة نظير

ضرب مصفوفة بعدد حقيقي:

لتكن لدينا المصفوفة $X_{(m.n)}$ والعدد الحقيقي $\sim \in R$. إن حاصل ضرب هذه المصفوفة بالعدد الحقيقي $\sim \in R$ ولنرمز له بـ $\sim X_{(m.n)}$ هو مصفوفة عناصرها هي عناصر المصفوفة $X_{(m.n)}$ نفسها بعد ضرب كل منها بالعدد الحقيقي α . أي أن:

$$\sim\cdot X_{(m,n)}=\sim\cdot\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sim .x_{11} & \sim .x_{12} & \cdots & \sim .x_{1j} & \cdots & \sim .x_{1n} \\ \sim \cdot_{21} & \sim .x_{22} & \cdots & \sim .x_{2j} & \cdots & \sim .x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots & \cdots & \ldots \\ \sim .x_{i1} & \sim .x_{i2} & \cdots & \sim .x_{ij} & \cdots & \sim .x_{in} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots & \cdots & \ldots \\ \sim .x_{m1} & \sim .x_{m2} & \cdots & \sim .x_{mj} & \cdots & \sim .x_{mn} \end{bmatrix}$$

حالة خاصة:

إن ناتج جداء المصفوفة $X_{(m,n)}$ بالعدد $\sim = -1$ هو مصفوفة النظير $\overline{X}_{(m,n)}$ (نظير المصفوفة $X_{(m,n)}$). لهذا يمكن أن نكتب:

$$\overline{X}_{(m,n)} = -X_{(m,n)}$$

أو :

$$X_{(m,n)} - X_{(m,n)} = O_{(m,n)}$$

وتتمتع عملية ضرب مصفوفة بعدد بالخواص الآتية:

إذا كانت $X_{(m,n)}, Y_{(m,n)}$ مصفوفتين كل منهما من المرتبة $m*n$ وكان $\sim ,$ عددين حقيقيين فإن:

$$\sim . (\quad . X_{(m,n)}) = (\sim . \quad) X_{(m,n)}$$

$$(\sim + \quad) X_{(m,n)} = \sim X_{(m,n)} + \quad X_{(m,n)}$$

$$\sim (X_{(m,n)} + Y_{(m,n)}) = \sim X_{(m,n)} + \sim Y_{(m,n)}$$

$$1 . X_{(m,n)} = X_{(m,n)}$$

$$0 . X_{(m,n)} = O_{(m,n)}$$

حيث $O_{(m,n)}$ مصفوفة صفرية، و 0 صفر عددي.

ضرب مصفوفة بمصفوفة:

إن الشرط الضروري لإمكانية ضرب مصفوفتين هو أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (اليسرى في عملية الضرب) مساوياً عدد أسطر الثانية (اليمنى في عملية الضرب)، أي أن يكون الدليلان المتجاوران في مرتبتيهما متساويين. وتكون مرتبة ناتج عملية الضرب هما الدليلين المتباعدين. فإذا فرضنا أن المصفوفتين $X_{(m,n)}$ و $Y_{(n,p)}$ كانتا على النحو التالي: فرضنا أن المصفوفتين $X_{(m,n)}$ و $Y_{(n,p)}$ كانتا على النحو التالي:

$$X_{(m,n)} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & & & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

$$Y_{(n,p)} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ y_{j1} & y_{j2} & \cdots & y_{jk} & \cdots & y_{jp} \\ \vdots & & & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nk} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix}$$

فإن عملية ضرب هاتين المصفوفتين $X_{(m,n)} \cdot Y_{(n,p)}$ ممكنة لأن الدليلين المتجاورين متساويان.

وإذا رمزنا لناتج عملية ضرب هاتين المصفوفتين بالرمز $Z_{(m,p)}$:

$$X_{(m,n)} \cdot Y_{(n,p)} = Z_{(m,p)}$$

فستكون $Z_{(m,p)}$ مصفوفة فيها m سطراً و p عموداً.

ونستطيع كتابة ما سبق رياضياً على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ y_{j1} & y_{j2} & \cdots & y_{jk} & \cdots & y_{jp} \\ \vdots & & & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nk} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1k} & \cdots & z_{1p} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2k} & \cdots & z_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ z_{i1} & z_{i2} & \cdots & z_{ik} & \cdots & z_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nk} & \cdots & z_{np} \end{bmatrix}$$

$$z_{11}=x_{11}.y_{11}+x_{12}.y_{21}+\dots+x_{lj}\,y_{j1}+\dots+x_{1n}.y_{n1}=\sum_{j=1}^{n}x_{1j}.y_{j1}$$

$$z_{12}=x_{11}.y_{12}+x_{12}.y_{22}+\dots+x_{lj}\,y_{j2}+\dots+x_{1u}\,y_{n2}=\sum_{j=1}^{n}x_{1j}\,y_{j2}$$

....

$$z_{21}=x_{21}\,y_{11}+x_{22}.y_{21}+\dots+x_{2j}\,y_{j1}+\dots+x_{2n}.y_{n1}=\sum_{j=1}^{n}x_{2j}\,y_{j1}$$

....

$$z_{ik}=x_{i1}\,y_{1k}+x_{i2}.y_{2k}+\dots+x_{ij}\,y_{jk}+\dots+x_{in}.y_{nk}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\,y_{jk}$$

....

$$z_{mp}=x_{m1}\,y_{1p}+x_{m2}\,y_{2p}+\dots+x_{mj}\,y_{jp}+\dots+x_{mn}\,y_{np}=\sum_{j=1}^{n}x_{mj}\,y_{jp}$$

ملاحظة:

لا يتغير شرط الضرب ولا كيفية إجراء عملية الضرب في الحالة الخاصة التي تكون فيها إحدى المصفوفتين أو كلاهما شعاعاً سطراً أو شعاعاً عموداً.

تطبيق عددي:

أوجد ناتج ضرب الشعاع $X_{(4,1)}$ بالشعاع $Y_{(1,4)}$ إذا كان:

$$X_{(4,1)}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\3\end{bmatrix},\quad Y_{(1,4)}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن عملية الضرب ممكنة وناتجها مصفوفة مربعة مؤلفة من *4* أسطر و *4* أعمدة:

$$X_{(4,1)}\cdot Y_{(1,4)}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-1) & 1\times0 & 1\times(-2) & 1\times1\\ 2\times(-1) & 2\times0 & 2\times(-2) & 2\times1\\ 0\times(-1) & 0\times0 & 0\times(-2) & 0\times1\\ 3\times(-1) & 3\times0 & 3\times(-2) & 3\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & +1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & +3 \end{bmatrix}$$

إذا أردنا أن نضرب الشعاع $Y_{(1,4)}$ بالشعاع $X_{(4,1)}$ فسيكون ناتج الضرب عدداً:

$$Y_{(1,4)}.X_{(4,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)\times 1 + 0\times 2 + (-2)\times 0 + 1\times 3 = 2$$

تطبيق عددي آخر:

أوجد ناتج ضرب الشعاع $X_{(3,1)}$ بالشعاع $Y_{(1,7)}$:

$$X_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y_{(1,7)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أولاً أن عملية الضرب ممكنة وناتج هذه العملية هو مصفوفة مستطيلة مؤلفة من ثلاثة أسطر وسبعة أعمدة، أي أن:

$$X_{(3,1)}.Y_{(1,7)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -6 & 8 & -2 & 10 \\ 3 & 0 & 6 & -9 & 12 & -3 & 15 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

تتمتع عملية ضرب المصفوفات بالخواص التالية:

إن عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية بصورة عامة.

- **ملاحظة:**

بالرغم من أن عملية ضرب المصفوفتين غير تبديلية بصورة عامة إلا أننا قد نصادف مصفوفتين جداؤهما تبديلي، كما في المصفوفتين القطريتين مثلاً. فإذا فرضنا أن:

$$A_{(n,n)}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{(n,n)}=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

فسيكون:

$$A_{(n,n)} \cdot B_{(n,n)} = B_{(n,n)} \cdot A_{(n,n)}$$

كذلك إذا كانت إحدى المصفوفتين مربعة والأخرى مصفوفة واحدية فإن عملية الضرب تكون تبديلية.

لنأخذ المصفوفتين المربعتين التاليتين:

$$X_{(2,2)}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} , \ I_{(2,2)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اللتين إحداهما مصفوفة واحدية. إن عملية ضرب هاتين المصفوفتين تبديلية لأن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

عملية ضرب المصفوفات تجميعية:

أي إذا فرضنا أنه لدينا المصفوفات $X_{(m,n)}, Y_{(n,p)}, Z_{(p.q)}$ فيكون:

$$\left[X_{(m,n)} \cdot Y_{(n,p)}\right] \cdot Z_{(p,q)} = X_{(m,n)} \cdot \left[Y_{(n,p)} \cdot Z_{(p,q)}\right] = X_{(m,n)} \cdot Y_{(n,p)} \cdot Z_{(p,q)}$$

عملية ضرب المصفوفات توزيعية:

لنفرض أن $X_{(m,n)}, Y_{(m,n)}, Z_{(l,m)}, V_{(n,p)}$ أربع مصفوفات عندئذ يمكن كتابة هذه الخاصة بالطريقتين الآتيتين:

$$Z_{(l.m)} \cdot \left[X_{(m.n)} + Y_{(m.n)}\right] = Z_{(l.m)} . X_{(m,n)} + Z_{(l.m)} . Y_{(m,n)}$$

$$\left[X_{(m,n)}+Y_{(m,n)}\right]V_{(n.p)}=X_{(m,n)}.V_{(n.p)}+Y_{(m,n)}.V_{(np)}$$

جداء أية مصفوفة بالمصفوفة الصفرية (سواء من اليمين أم من اليسار) هو المصفوفة الصفرية:
أي أن:

$$O_{(m,n)}.A_{(n,p)}=O_{(m.p)}$$
$$A_{(m,n)}.O_{(n,p)}=O_{(m.p)}$$

ملاحظة:

قد يكون ناتج عملية ضرب مصفوفتين ببعضهما مساوياً المصفوفة الصفرية دون أن يكون أي من المصفوفتين المفروضتين مصفوفة صفرية. أي أن المصفوفة الصفرية لا تلعب في المصفوفات، الدور نفسه الذي يلعبه الصفر في الأعداد الحسابية.

تطبيق عددي:

لتكن لدينا المصفوفتان التاليتان:

$$X_{(2,3)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad Y_{(3,2)}=\begin{bmatrix}3 & 15\\ 1 & 5\\ -1 & -5\end{bmatrix}$$

حاصل ضربهما هو:

$$X_{(2,3)}.Y_{(3,2)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 15\\ 1 & 5\\ -1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

جداء أية مصفوفة بالمصفوفة الأحادية (سواء من اليمين أم اليسار) يساوي المصفوفة الأصلية نفسها: أي أن:

$$I_{(m,m)}.A_{(m,n)}=A_{(m.n)}$$
$$A_{(m,n)}.I_{(n,n)}=A_{(m.n)}$$

ضرب مصفوفة بمصفوفة قطرية من اليسار يعطينا مصفوفة جديدة هي المصفوفة الأصلية بعد ضرب كل سطر من أسطرها بالعنصر القطري المقابل في المصفوفة القطرية. كذلك فإن ضرب مصفوفة بمصفوفة قطرية من اليمين يعطينا مصفوفة جديدة هي المصفوفة الأصلية بعد ضرب كل عمود من أعمدتها بالعنصر القطري المقابل في المصفوفة القطرية.

تطبيق عددي: لتكن لدينا مصفوفتان إحداهما قطرية كما يلي:

$$X_{(3,3)}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&5&0\\0&0&2\end{bmatrix} \quad , \quad Y_{(3,2)}=\begin{bmatrix}3&15\\1&5\\-1&-5\end{bmatrix}$$

إن حاصل ضرب هاتين المصفوفتين هو:

$$X_{(3,3)}.Y_{(3,2)}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&5&0\\0&0&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&15\\1&5\\-1&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-15\\5&25\\-2&-10\end{bmatrix}$$

في ضرب المصفوفات لا يمكن إجراء عملية الاختصار: فإذا كان لدينا المصفوفات: $X_{(m,n)}$ ، $Y_{(n,p)}$ ، $Z_{(n.p)}$ وإذا فرضنا أن العلاقة الآتية محققة:

$$X_{(m,n)}.Y_{(n,p)}=X_{(m,n)}.Z_{(n,p)}$$

فهذا لا يعني بالضرورة أن تتحقق العلاقة الآتية: $Y_{(n,p)}=Z_{(n,p)}$

منقول (أو تدوير) المصفوفات:

إن منقول المصفوفة (أو مدور المصفوفة) هو مصفوفة جديدة نحصل عليها بتحويل أسطر المصفوفة إلى أعمدة وأعمدة المصفوفة إلى أسطر، مع الاحتفاظ بترتيب مواضع العناصر.

فإذا فرضنا أن لدينا المصفوفة $X_{(m,n)}$ التي لها m سطراً و n عموداً فإن منقولها (أو مدورها) ولنرمز له بالرمز $X'_{(m,n)}$ سيكون مصفوفة لها n سطراً و m عموداً كما يلي:

$$X_{(m,n)}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&\dots&x_{1j}&\dots&x_{1n}\\x_{21}&x_{22}&\dots&x_{2j}&\dots&x_{2n}\\\vdots&&&&&\\x_{i1}&x_{i2}&\dots&x_{ij}&\dots&x_{in}\\\vdots&&&&&\\x_{m1}&x_{m2}&\dots&x_{mj}&\dots&x_{mn}\end{bmatrix},$$

$$X'_{(m,n)} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{i1} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{i2} & \dots & x_{m2} \\ \vdots \\ x_{1j} & x_{2j} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{mj} \\ \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{in} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

تطبيق عددي:

لتكن لدينا المصفوفة $X_{(4,3)}$ على النحو التالي:

$$X_{(4,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

إن منقول هذه المصفوفة هو:

$$X'_{(3.4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

وتتمتع عملية تدوير المصفوفات بالخواص التالية:

مدور مجموع مصفوفتين يساوي مجموع مدوريهما:

$$[X_{(m,n)} + Y_{(m,n)}]' = X'_{(m.n)} + Y'_{(m,n)}$$

مدور جداء مصفوفة بعدد حقيقي يساوي العدد الحقيقي مضروباً بمدور المصفوفة:

$$.(a.X_{(m,n)})' = a.X'_{(m,n)}$$

مدور جداء مصفوفتين يساوي جداء مدوريهما بعد تبديل مكاني المصفوفتين في الجداء وتبديل ادلة كل منهما:

$$[X_{(m,n)} \times Y_{(n,p)}]' = Y'_{(n,p)} \times X'_{(m,n)}$$

مدور مدور مصفوفة هو المصفوفة الأصلية، أي أن:

$$(X'_{(m,n)})' = X_{(m,n)}$$

ملاحظة (1):

إذا كانت المصفوفة $S_{(n,n)}$ متناظرة فإنها تساوي مدورها:

$$S_{(n,n)} = S'_{(n,n)}$$

وإذا كانت المصفوفة $A_{(n,n)}$ متعاكسة التناظر فإنها تساوي مدورها مضروباً بـ 1-:

$$A_{(n,n)} = -A'_{(n,n)}$$

ملاحظة (2):

مقابل كل مصفوفة مربعة $M_{(n,n)}$ يمكن إيجاد مصفوفتين، الأولى متناظرة $S_{(n,n)}$ والثانية متعاكسة التناظرِ $A_{(n,n)}$.

للتحقق من صحة هذه القاعدة لنفرض أننا استطعنا كتابة المصفوفة المربعة المفروضة $M_{(n,n)}$ على صورة مجموع المصفوفتين المتناظرة $S_{(n,n)}$ ومتعاكسة التناظرِ $A_{(n,n)}$:

$$M_{(n,n)} = S_{(n,n)} + A_{(n,n)} \qquad \text{(I)}$$

ولنحاول إيجاد كل من هاتين المصفوفتين $S_{(n,n)}$ و $A_{(n,n)}$.

لنأخذ مدور المصفوفات في كل طرف من العلاقة السابقة فنجد:

$$M'_{(n,n)} = S'_{(n,n)} + A'_{(n,n)}$$

وبما أن $S_{(n,n)}$ مصفوفة متناظرة و $A_{(n,n)}$ مصفوفة متعاكسة التناظر فسيكون:

$$A'_{(n,n)} = -A_{(n,n)} \; , \; S'_{(n,n)} = S_{(n,n)}$$

لهذا سيكون:

$$M'_{(n,n)} = S_{(n,n)} - A_{(n,n)} \qquad \text{(II)}$$

– إذا جمعنا المعادلتين (I) و (II) طرفاً لطرف نجد:

$$M_{(n,n)} + M'_{(n,n)} = 2S_{(n,n)}$$

ومنه فإن المصفوفة المتناظرة $S_{(n,n)}$ التي نحصل عليها من المصفوفة $M_{(n,n)}$ ستكون:

$$S_{(n,n)} = \frac{1}{2}[M_{(n,n)} + M'_{(n,n)}]$$

– وإذا طرحنا المعادلتين (I) و(II) طرفاً من طرف نجد:

$$M_{(n,n)} - M'_{(n,n)} = 2A_{(n,n)}$$

فالمصفوفة متعاكسة التناظرِ $A_{(n,n)}$ التي نحصل عليها من المصفوفة $M_{(n,n)}$ ستكون:

$$A_{(n,n)} = \frac{1}{2}[M_{(n,n)} - M'_{(n,n)}]$$

تطبيق عددي:

لنوجد المصفوفتين، المتناظرة ومتعاكسة التناظرِ من المصفوفة الآتية:

$$M_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة المتناظرة $S_{(4,4)}$ هي:

$$S_{(4,4)} = \frac{1}{2}\left[M_{(4,4)} + M^t_{(4,4)}\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة متعاكسة التناظر $A_{(4,4)}$ هي:

$$A_{(4,4)} = \frac{1}{2}[M_{(4,4)} - M^t_{(4,4)}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

نتيجة: من العلاقة (I) نستنتج أن كل مصفوفة مربعة $M_{(n,n)}$ يمكن كتابتها في صورة مجموع مصفوفتين الأولى متناظرة والثانية متعاكسة التناظر.

المحاضرة القادمة الاحد القادم

والثلاثاء القادم / في تمام الساعة /