الباب الخامس

المصفوفات

Matrices

الباب الخامس

المصفوفات

Matrices

5–1 مقـدمة :

تعرف المصفوفة بأنها عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة فى شكل صفوف وأعمدة وموضوعة داخل قوسين كالآتى :

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أ_{11} يسمى عنصراً فى المصفوفة أ ويقع فى الصف الأول والعمود الأول.

أ_{21} يسمى عنصراً فى المصفوفة أ ويقع فى الصف الأول والعمود الثانى.

أ_{13} يسمى عنصراً فى المصفوفة أ ويقع فى الصف الثالث والعمود الأول.

أى أن الرقم الأول فى دليل العنصر يعبر عن رقم الصف والرقم الثانى يعبر عن رقم العمود. كما أن العناصر أ_{11}، أ_{22}، أ_{33} تسمى عناصر القطر الرئيسى.

والمصفوفة قد تكون مربعة إذا كان عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة وقد تكون مستطيلة إذا كان عدد الصفوف لا يساوى عدد الأعمدة، مثال ذلك:

المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة تحتوى على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة.

المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة مستطيلة لأنها تتكون من صفين وأربعة أعمدة.

وتتحدد درجة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة التى تحتويها. فمثلاً المصفوفة :

أ = $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة تتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة وذلك فهى من الدرجة (3×3).

والمصفوفة ب = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة مستطيلة من الدرجة (2×3) لأنها تتكون من صفين وثلاثة أعمدة.

وتلعب المصفوفات دوراً هاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالى وضع الحلول لهذه العلاقات، فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها مجالات تطبيقية عديدة فى الاقتصاد والإحصاء وبحوث العمليات وغيرها من العلوم الأخرى. ومن ثم فإننا سوف نتناول فى هذا الباب بعض المفاهيم والتعاريف الهامة وأنواع المصفوفات ثم ننتقل إلى جبر المصفوفات (الجمع والطرح والضرب) وبعدها نتناول كيفية إيجاد معكوس المصفوفة المربعة بالطرق المختلفة تمهيداً لاستخدامه فى حل

المعادلات الخطية، ثم ننهى هذا الباب بعرض بعض التطبيقات الاقتصادية والتجارية للمصفوفات.

2−5 أنواع المصفوفات : Types of Matrices

توجد المصفوفات على أنواع كثيرة ومختلفة وكل نوع له ما يميزه عن النوع الآخر بما يحتويه من صفوف وأعمدة.

المصفوفة المربعة : Square Matrix

هى مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد أعمدتها ولذلك فهى تكون من الرتبة (2 × 2) أو (3 × 3) أو (4 × 4) أو (م × ن) ، حيث م = ن

فعلى سبيل المثال فإن :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة من الدرجة (2×2)

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} & \text{ب}_{31} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{32} \\ \text{ب}_{13} & \text{ب}_{23} & \text{ب}_{33} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة من الدرجة (3×3)

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{جـ}_{11} & \text{جـ}_{21} & \text{جـ}_{31} & \text{جـ}_{41} \\ \text{جـ}_{12} & \text{جـ}_{22} & \text{جـ}_{32} & \text{جـ}_{42} \\ \text{جـ}_{13} & \text{جـ}_{23} & \text{جـ}_{33} & \text{جـ}_{43} \\ \text{جـ}_{14} & \text{جـ}_{24} & \text{جـ}_{34} & \text{جـ}_{44} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة من الدرجة (4×4)

وسوف نرى فيما بعد أن مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات الخطية هى مصفوفة مربعة دائماً.

المصفوفة المستطيلة : Rectangular Matrix

هى مصفوفة عدد صفوفها لا يساوى عدد اعمدتها ومثال ذلك :

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{21} & أ_{11} \\ أ_{22} & أ_{12} \\ أ_{23} & أ_{13} \end{bmatrix}$$ مصفوفة مستطيلة من الدرجة (3×2)

$$ب = \begin{bmatrix} ب_{41} & ب_{31} & ب_{21} & ب_{11} \\ ب_{42} & ب_{32} & ب_{22} & ب_{12} \\ ب_{43} & ب_{33} & ب_{23} & ب_{13} \end{bmatrix}$$ مصفوفة مستطيلة من الدرجة (3×4)

ومن أمثلة المصفوفة المستطيلة؛ مصفوفة الصف الواحد، مصفوفة العمود الواحد كما سنرى بعد قليل.

مصفوفة الوحدة : Identity Matrix

وهى مصفوفة مربعة كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسى يساوى الواحد الصحيح، وباقى عناصر المصفوفة أصفار. ويرمز لها بالرمز I مثال ذلك :

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ويرمز لها بالرمز I_2 .

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ويرمز لها بالرمز I_3 .

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ويرمز لها بالرمز I_4 .

المصفوفة القياسية : Scalar Matrix

هى مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسى متساوية القيمة وباقى عناصرها أصفار فمثلاً :

أ = $\begin{bmatrix} 0 & ك \\ ك & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة قياسية من الدرجة (2×2)

ب = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & ك \\ 0 & ك & 0 \\ ك & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة قياسية من الدرجة (3×3)

حيث ك مقدار حقيقى، ك ≠ صفر وتجدر الإشارة هنا أن المصفوفة القياسية = ك × مصفوفة الوحدة من نفس الدرجة ، مثال ذلك :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} 3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} 5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية : Diagonal Matrix

هى مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسى مقادير حقيقية ليست بالضرورة متساوية. وعلى ذلك فإن كلاً من مصفوفة الوحدة والمصفوفة القياسية هى حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

أ = $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية من الدرجة (2×2)

ب = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية من الدرجة (3×3)

المصفوفة الصفرية : Null Matrix

هـى مصـفوفة جميـع عناصـرها أصـفار وقـد تكـون المصـفوفة الصـفرية مربعة أو مستطيلة، ومثال ذلك :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الصف الواحد (متجه الصف) : Row Vector

وهـى مصـفوفة مستطيلة تحتـوى علـى صـف واحـد وأى عـدد مـن الأعمـدة وأمثلة ذلك :

أ = $[\text{أ}_{11} \quad \text{أ}_{21}]$ متجه صف من الدرجة (1×2)

ب = $[\text{ب}_{11} \quad \text{ب}_{21} \quad \text{ب}_{31} \quad \text{ب}_{41}]$ متجه صف من الدرجة (1× 4)

جـ = $[\text{جـ}_{11} \quad \text{جـ}_{21} \quad \ldots \quad \text{جـ}_{1\text{ن}}]$ متجه صف من الدرجة (1× ن)

مصفوفة العمود الواحد (متجه عمود) : Column Vector

وهـى مصـفوفة مسـتطيلة تحتـوى علـى عـدة صـفوف وعمـود واحـد فقـط وأمثلة ذلك :

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{11} \\ أ_{12} \\ أ_{13} \end{bmatrix}$$ متجه عمود من الدرجة (3× 1)

$$ب = \begin{bmatrix} ر_{11} \\ ر_{12} \\ ر_{13} \\ ر_{14} \end{bmatrix}$$ متجه عمود من الدرجة (4× 1)

$$جـ = \begin{bmatrix} جـ_{11} \\ جـ_{12} \\ \vdots \\ جـ_{ن1} \end{bmatrix}$$ متجه عمود من الدرجة (ن × 1)

مبدول المصفوفة : Transpose of Matrix

نحصل على مبدول المصفوفة بتبديل صفوفها بأعمدتها أى بجعل صفها الأول مكان العمود الأول وصفها الثانى مكان العمود الثانى وهكذا. فإذا كان لدينا المصفوفة :

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{bmatrix}$$

فإن مبدول هذه المصفوفة أ ويرمز له بالرمز أ′ يكون على الصورة الآتية :

$$أ` = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} \end{bmatrix}$$

خصائص مبدول المصفوفة :

إذا كان لدينا المصفوفات أ ، ب ، جـ فإن :

(i) (أ′)′ = أ

(ii) أ′ + ب′ + جـ′ = (أ + ب + جـ)′

(iii) (أ × ب × جـ)′ = جـ′ × ب′ × أ′

(iv) (أ′)$^{1-}$ = (أ$^{1-}$)′

مثال (1) :

إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 5 & 1- & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

فإن

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1- \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \text{أ}'$$

المصفوفة المتماثلة : Symmetrical Matrix

هى مصفوفة مربعة لو تم تدويرها لأعطت المصفوفة الأصلية.

مثال (2) :

المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6- & 7 & 5 \\ 1 & 6- & 3 \end{bmatrix} = \text{أ}$

مبدول المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6- & 7 & 5 \\ 1 & 6- & 3 \end{bmatrix} = \text{أ}'$

واضح أن : أ = أ′

إذن : أ تسمى مصفوفة متماثلة.

ونلاحظ أنـه عند إيجاد مبدول المصـفوفة (أ) نجد أن عناصـر القطـر الرئيسـى لا تتغير وبالتالى فإنـه يمكننا القول أن المصـفوفة القطريـة والمصـفوفة القياسـية ومصـفوفة الوحـدة والمصـفوفة الصـفرية المربعـة جميعهـا مصـفوفات متماثلـة. كمـا أن المصـفوفات المتماثلـة تعطـى معكوسـات متماثلـة أيضـاً كمـا سنرى فيما بعد.

تساوى المصفوفات : **Eqality of Matrices**

يقـال لمصـفوفتين أنهمـا متسـاويتان إذا كانتـا مـن نفس الدرجـة وكـان كـل عنصـر فـى المصـفوفة الأولـى يسـاوى نظيـره فـى المصـفوفة الثانيـة. فمـثلاً المصفوفتان :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix} 2 & س \\ ص & 3 \end{bmatrix}$$

يقال أنهما متساويتان إذا كان س = 1 ، ص = 4

مثال (3) :

أوجد قيمة س ، ص ، ع إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix} 2 & س \\ ص & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

حيث أن المصفوفتين متساويتان، فإن كل عنصر فى المصفوفة الأولى يساوى نظيره فى المصفوفة الثانية، أى أن :

س = 2 − س ‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏ ع + 1 = 1−

2 س = 2 ‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏ ع = 2−

س = 1 ‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏‏ ص = 5

المصفوفةالمفردة وغيرالمفردة :

Singular & Non-Singular Matrices

لأى مصفوفة مربعة أ من الدرجة (ن × ن)، يقال إنها غير مفردة إذا كان المحدد الذى درجته (ن) لا يتلاشى. أى أنه :

إذا كان | أ | ≠ صفر فإن المصفوفة أ غير مفردة.

أما إذا كان | أ | = صفر فإن المصفوفة أ تسمى مصفوفة مفردة.

وتلعب المصفوفة غيرالمفردة (non-singular) دوراً هاماً فى إيجاد معكوس المصفوفة.

مثال (4) :

بين ما إذا كانت المصفوفة الآتية مفردة أم غير مفردة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

الحل:

لتحديد ما إذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة ، نوجد محددها كالآتى:

$$|\text{أ}| = 1\begin{vmatrix}4 & 3\\7 & 5\end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix}4 & 2\\7 & 3\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 3\end{vmatrix}$$

$$= 1\,(20 - 21) - 2\,(12 - 14) + 3\,(9 - 10)$$

$$= -1 + 4 - 3 = \text{صفر}$$

حيث أن : $|\text{أ}| = \text{صفر}$

فالمصفوفة أ مصفوفة مفردة.

مثال (5) :

بين ما إذا كانت المصفوفة الآتية مفردة أم غير مفردة:

$$\text{ب} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\\5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

الحل:

لتحديد ما إذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة ، نوجد محددها كما سبق. وحيث أن: $|\text{ب}| = 18 \neq \text{صفر}$

فإن المصفوفة (ب) مصفوفة غيرمفردة.

محدد المصفوفة المربعة : Determinant of a Square Matrix

إذا كانت المصفوفة مربعة فإنه يمكن تكوين محدد لهذه المصفوفة يسمى محدد المصفوفة. فمثلاً إذا كان لدينا المصفوفة :

أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

فإن محدد المصفوفة أ والذى يرمز له بالرمز | أ | يمكن إيجاده كالآتى :

| أ | = $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

= 1 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ –2 $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ +3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

= 1 (5 − صفر) − 2 (10 − صفر) + 3 (2 − 3)

= 5 − 20 − 3 = − 18

3-5 العمليات على المصفوفات : Matrix-Operations

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات ، ويشترط لجمع أو طرح المصفوفات أن تكون من نفس الدرجة على أن يتم جمع العناصر المتناظرة جمعاً جبرياً. أما فى حالة ضرب المصفوفات فإن هذه العمليات تتطلب شرطا خاصا لكى تتم عملية الضرب.

أولاً : جمع وطرح المصفوفات : Addition & Subtraction

مثال (6) :

إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2- & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1- & 1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 7 & 3- & 1 \\ 8 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2- \\ 9 & 0 & 3- \\ 6 & 2 & 1- \end{bmatrix}$

فأوجد:

1 − أ + ب   2− ب − جـ

3− 2 أ − 3 ب + جـ

الحل:

1− أ + ب =
$$\begin{bmatrix}3&-2&5\\4&1&6\\2&-1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&-3&1\\8&-1&0\\3&4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-5&6\\12&0&6\\5&3&3\end{bmatrix}$$

2− ب − جـ =
$$\begin{bmatrix}7&-3&1\\8&-1&0\\3&4&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&1&-2\\9&0&-3\\6&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4&3\\-1&-1&3\\-3&2&3\end{bmatrix}$$

3− 2أ − 3ب + جـ =
$$2\begin{bmatrix}3&-2&5\\4&1&6\\2&-1&1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}7&-3&1\\8&-1&0\\3&4&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&1&-2\\9&0&-3\\6&2&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&-4&10\\8&2&12\\4&-2&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-21&9&-3\\-24&3&0\\-9&-12&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1&-2\\9&0&-3\\6&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&6&5\\-7&5&9\\1&-12&-5\end{bmatrix}$$

مثال (7) :

إذا كان:

أ =
$$\begin{bmatrix}2&2&1\\3&-1&0\\4&1&-1\end{bmatrix}$$
، ب =
$$\begin{bmatrix}5&3&0\\2&4&1\\-1&6&2\end{bmatrix}$$

(i) أوجد أ′ ، ب′

(ii) أثبت أن : (أ′ + ب′) = (أ + ب)′

الحل :

(i)

أ′ = $\begin{bmatrix} 1- & 0 & 1 \\ 1 & 1- & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب′ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ 1- & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) أ′ + ب′ = (أ + ب)′

الطرف الأيمن = أ′ + ب′

$$= \begin{bmatrix} 1- & 0 & 1 \\ 1 & 1- & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ 1- & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

الطرف الأيسر = (أ + ب)′

(أ + ب) = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1- & 0 \\ 4 & 1 & 1- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1- & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

(أ + ب)′ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

وبالتالى فإن:

أ′ + ب′ = (أ + ب)′

مثال (8) :

إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6- & 4- \end{bmatrix}$

فاحسب : 3 أ − 5 ب + 3 I

الحل :

3 أ − 5 ب + 3 I =

$$= 3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}3 & 5\\ -4 & -6\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 & -3\\ 6 & 9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-15 & -25\\ 20 & 30\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9 & -28\\ 26 & 42\end{bmatrix}$$

مثال (9) :

أ = $\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}0 & -4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

أثبت أن : أ′ + ب′ + جـ′ = (أ + ب + جـ)′

الحل :

أ = $\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ⇔ أ′ = $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

ب = $\begin{bmatrix}0 & -4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ ⇔ ب′ = $\begin{bmatrix}0 & 3\\ -4 & 5\end{bmatrix}$

جـ = $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$ ⇔ جـ′ = $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 6\end{bmatrix}$

الطرف الأيمن = أ′ + ب′ + جـ′

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 13 & 6- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

الطرف الأيسر = أ + ب + جـ

$$\left(\begin{bmatrix} 6- & 4 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}\right)' = \left(\begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4- & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1- \end{bmatrix}\right)' =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 13 & 6- \end{bmatrix} =$$ (أ + ب + جـ)′

أى أن : أ′ + ب′ + جـ′ = (أ + ب + جـ)′

ثانياً : ضرب المصفوفات : Multiplication of Matrices

يشترط لضرب مصفوفتين أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة تكون فى هذه الحالة من الدرجة (عدد صفوف الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية) ومثال ذلك :

أ$_{2\times3}$ × ب$_{3\times3}$ = جـ$_{2\times3}$

أ$_{3\times1}$ × ب$_{1\times3}$ = جـ$_{3\times3}$

أ$_{3\times2}$ × ب$_{2\times3}$ = جـ$_{3\times3}$

مثال (10) :

إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} أ_{21} & أ_{11} \\ أ_{22} & أ_{12} \\ أ_{23} & أ_{13} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ب_{21} & ب_{11} \\ ب_{22} & ب_{12} \end{bmatrix}$

أوجد : جـ = أ ب

الحل :

حيث أن عدد أعمدة المصفوفة أ = 2

حيث عدد صفوف المصفوفة ب = 2

يمكن إيجاد حاصل الضرب جـ = أ ب ، حيث :

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11}\times\text{ب}_{11}+\text{أ}_{21}\times\text{ب}_{12} & \text{أ}_{11}\times\text{ب}_{21}+\text{أ}_{21}\times\text{ب}_{22} \\ \text{أ}_{12}\times\text{ب}_{11}+\text{أ}_{22}\times\text{ب}_{12} & \text{أ}_{12}\times\text{ب}_{21}+\text{أ}_{22}\times\text{ب}_{22} \\ \text{أ}_{13}\times\text{ب}_{11}+\text{أ}_{23}\times\text{ب}_{12} & \text{أ}_{13}\times\text{ب}_{21}+\text{أ}_{23}\times\text{ب}_{22} \end{bmatrix}$$

العنصر $\text{جـ}_{11} = \text{أ}_{11} \times \text{ب}_{11} + \text{أ}_{21} \times \text{ب}_{12}$ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصر $\text{جـ}_{21} = \text{أ}_{11} \times \text{ب}_{21} + \text{أ}_{21} \times \text{ب}_{22}$ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الثانى من المصفوفة الثانية.

العنصر $\text{جـ}_{12} = \text{أ}_{12} \times \text{ب}_{11} + \text{أ}_{22} \times \text{ب}_{12}$ حصلنا عليه بضرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصــر جـ$_{22}$ = أ$_{12}$ × ب$_{21}$ + أ$_{22}$ × ب$_{22}$ حصــلنا عليــه بضــرب عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الثانى من المصفوفة الثانية.

العنصــر جـ$_{13}$ = أ$_{13}$ × ب$_{11}$ + أ$_{23}$ × ب$_{12}$ حصــلنا عليــه بضــرب عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الأول من المصفوفة الثانية.

العنصــر جـ$_{23}$ = أ$_{13}$ × ب$_{21}$ + أ$_{23}$ × ب$_{22}$ حصــلنا عليــه بضــرب عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى فى العناصر المناظرة لها فى العمود الثانى من المصفوفة الثانية.

والأمثلة الآتية توضح كيفية ضرب مصفوفتين.

مثال (11) :

إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

أوجد :

(i) أ ب (ii) ب أ

(iii) هل أ ب = ب أ ؟

الحل :

(i) أ ب = $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} (6\times3)+(4\times2) & (2-\times3)+(1-\times2) \\ (6\times5)+(4\times1-) & (2-\times5)+(1-\times1-) \end{bmatrix} \quad =$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 8- \\ 26 & 9- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+8 & 6-2- \\ 30+4- & 10-1 \end{bmatrix} \quad =$$

(ii) ب أ = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1- \\ 6 & 2- \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} (5\times4)+(3\times1-) & (1-\times4)+(2\times1-) \\ (5\times6)+(3\times2-) & (1-\times6)+(2\times2-) \end{bmatrix} \quad =$$

$$\begin{bmatrix} 17 & 6- \\ 24 & 10- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20+3- & 4-2- \\ 30+6- & 6-4- \end{bmatrix} \quad =$$

(iii) أ ب $\neq$ ب أ

مثال (12) :

أ = $\begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 2 & 1- & 1 \\ 2- & 3 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد :

(i) أ ب

(ii) ب أ

(iii) هل أ ب = ب أ ؟

الحل :

(i) أ ب = $\begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1- & 1 \\ 2- & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6- & 7 & 1- \\ 2- & 3 & 0 \\ 4- & 8 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) ب أ $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) أ ب $\neq$ ب أ وواضح أنهما من درجتين مختلفتين.

مثال (13) :

إذا كان:

أ $= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

فأوجد : أ ب

الحل :

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة (أ) لا يساوى عدد صفوف المصفوفة (ب) وبالتالى فإنه لا يمكن إجراء عملية الضرب لأنها غير معرفة. هل يمكن إيجاد حاصل الضرب ب أ ؟ ولماذا ؟

مثال (14) :

إذا كان : أ $= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد :

(i) أ I (ii) I أ

الحل :

(i) $\text{أ}\, I = = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $I\, \text{أ} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

أى أنه عند ضرب أية مصفوفة فى مصفوفة الوحدة من اليمين أو من اليسار، فإن حاصل الضرب يعطى نفس المصفوفة أى أن :

(i) $\text{أ}\, I = \text{أ}$

(ii) $I\, \text{أ} = \text{أ}$

مثال (15) :

إذا كان :

$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

أثبت أن : $(\text{أ} \times \text{ب} \times \text{جـ})' = \text{جـ}' \times \text{ب}' \times \text{أ}'$

الحل :

$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{أ}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\text{ب} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{ب}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$\text{جـ} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{جـ}' = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

الطرف الأيمن = (أ × ب × جـ)′

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right)'$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}\right)'$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 16 & -34 \\ 28 & -60 \end{bmatrix}\right)'$$

$$= \begin{bmatrix} -60 & -34 \\ 28 & 16 \end{bmatrix}$$

الطرف الأيسر = جـ′ × ب′ × أ′

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -21 & 8 \\ 10 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 & -34 \\ 28 & 16 \end{bmatrix}$$

وبالتالى فإن:

(أ × ب × جـ)′ = جـ′ × ب′ × أ′

4-5 معكوس المصفوفة : Inverse of Matrix

يمكن إيجاد معكوس المصفوفة بإحدى الطرق الآتية :

1- باستخدام المحددات.

2- طريقة جاوس.

3- طريقة العمليات المختصرة على الصفوف.

4- طريقة العوامل المرافقة.

5- طريقة التقسيم.

وجميع هذه الطرق المستخدمة فى إيجاد معكوس المصفوفة تعطى نفس النتيجة. غير أننا سوف نتناول هنا طريقتين فقط لإيجاد معكوس المصفوفة وهما:

أولاً : طريقة العوامل المرافقة : Cofactors Method

وتتخلص هذه الطريقة فى الخطوات الآتية :

(i) نوجد قيمة محدد المصفوفة (Δ).

(ii) نوجد مصفوفة المرافقات.

(iii) نوجد مدور مصفوفة المرافقات.

(iv) نقسم مدور مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة فنحصل على معكوس المصفوفة (أ$^{-1}$).

مثال (16) :

أوجد معكوسة المصفوفة الآتية :

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

لإيجاد معكوس المصفوفة نتبع الخطوات الآتية:

(i) نوجد محدد المصفوفة.

$$(3- \times 2) - (5- \times 1) \;=\; \begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 5- & 2 \end{bmatrix} \;=\; \Delta$$

$$1 \;=\; 6 \;+\; 5- \;=$$

(ii) نوجد مصفوفة المرافقات مع أخذ قاعدة الإشارات فى الاعتبار.

$$\begin{bmatrix} 2- & 5- \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & (5-)+ \\ 1+ & (3-)- \end{bmatrix} =$$ مصفوفة المرافقات

(iii) نوجد مبدول مصفوفة المرافقات :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} =$$ مبدول مصفوفة

(iv) $$\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} = {}^{1-}\text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \frac{1}{1} \;=$$

من المعروف أن حاصل ضرب المصفوفة فى معكوسها يساوى مصفوفة الوحدة. أى أن :

$$\text{I} \;=\; \text{أ} \;\times\; {}^{1-}\text{أ} \;=\; {}^{1-}\text{أ} \;\times\; \text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 5- & 2 \end{bmatrix} \;=\; {}^{1-}\text{أ}\;\text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} (1\times 3-)+(3\times 1) & (2-\times 3-)+(5-\times 1) \\ (1\times 5-)+(3\times 2) & (2-\times 5-)+(5-\times 2) \end{bmatrix} \;=$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-3 & 6+5-\\ 5-6 & 10+10-\end{bmatrix} \qquad =$$

مثال (17) :

أوجد معكوس المصفوفة الآتية :

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

الحل :

(i) نوجد محدد المصفوفة باستخدام عناصر الصف الثانى.

$$\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}2- \begin{bmatrix}1 & 5\\ 4 & 1\end{bmatrix}2- = \begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad = \quad \Delta$$

$$(5 - 3)\ 2 - \ (1 - 20)\ 2 - \ =$$

$$(2-)\ \ 2 - \ (19)\ 2 - \ =$$

$$34 - \ = \ 4 \ + \ 38 - \ =$$

(ii) نوجد مصفوفة المرافقات مع الأخذ فى الاعتبار قاعدة الإشارات.

$$\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+ & \begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}- & \begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}+\\ \begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}- & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}+ & \begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 1\end{vmatrix}-\\ \begin{vmatrix}5 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}+ & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}- & \begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\end{bmatrix} = \text{مصفوفة المرافقات}$$

$$= \begin{bmatrix} (0-2) & +(2-8)- & (2-0) \\ (5-3) & -(1-12)+ & (1-20) \\ (10-0) & +(2-6) & -(0-10) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 19- & 2- \\ 4- & 11 & 6- \\ 10- & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(iv) نقسم مبدول مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة ونحصل على معكوس المصفوفة المطلوب.

$$أ^{1-} = \frac{1}{34-} \begin{bmatrix} 10 & 19- & 2- \\ 4- & 11 & 6- \\ 10- & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ولكى نتأكد من صحة هذا الحل نقوم بضرب المصفوفة فى معكوسها والنتيجة يجب أن تكون مصفوفة الوحدة.

$$أ^{1-} = \frac{1}{34-} \begin{bmatrix} 10 & 19- & 2- \\ 4- & 11 & 6- \\ 10- & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{34-} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 34- \\ 0 & 34- & 0 \\ 34- & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثانياً : طريقة العمليات المختصرة على الصفوف : Row Reduction

تستخدم طريقة العمليات المختصرة على الصفوف (التحويلات الصفية المختصرة) لإيجاد معكوس المصفوفة. وتتلخص هذه الطريقة فى الخطوات الآتية :

(i) نضـع المصـفوفة المطلـوب إيجـاد معكوسـها بجـوار مصـفوفة الوحـدة مـن نفـس الدرجـة ويفصـل بينهمـا خـط رأســى، وتسـمى المصـفوفة الممتـدة Augmented matrix .

(ii) نقـوم بـبعض العمليـات (التحـويلات) علــى الصـفوف حتــى تتحـول المصـفوفة الأولـى إلـى مصـفوفة الوحـدة، وتتحـول مصـفوفة الوحـدة إلـى مصـفوفة جديـدة هـى المعكـوس المطلـوب الحصـول عليـه للمصـفوفة الأصلية.

مثال (18) :

أوجد معكوس المصفوفة الآتية باستخدام طريقة العمليات المختصرة على الصفوف.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

الحل :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر 2 فى الصف الأول والعمود الأول واحداً صحيحاً وذلك بقسمة الصف الأول على (2).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

نضـرب الصـف الأول فـى (−4) ونجمـع النـاتج علـى الصـف الثـانى ونحصـل علـى :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1- & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر (-1) فى الصف الثانى والعمود الثانى واحداً صحيحاً وذلك بضرب عناصر الصف الثانى فى (-1).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1- & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر $\left(\frac{3}{2}\right)$ فى الصف الأول والعمود الثانى صفراً وذلك بضرب عناصر الصف الثانى فى $\left(-\frac{3}{2}\right)$ وجمع الناتج على عناصر الصف الأول المناظرة فنحصل على.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{2} & & \frac{5}{2}- & 0 & & 1 \\ & \text{أ}^{1-} & & & I & \\ 1- & & 2 & 1 & & 0 \end{array}\right]$$

ولكى نتحقق من الحل :

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 6+5- \\ 5-6 & 10+10- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2}- \\ 1- & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}^{1-}\,\text{أ}$$

مثال (19) :

أوجد معكوس المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad = \quad \text{أ}$$

الحل :

لإيجاد معكوس هذه المصفوفة سوف نستخدم طريقة العمليات المختصرة على الصفوف.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر (4) فى الصف الأول والعمود الأول واحداً صحيحاً وذلك بقسمة عناصر الصف الأول على العدد (4).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نجعل باقى عناصر العمود الأول أصفاراً وذلك بتنفيذ العمليتين الآتيتين :

1− نضرب الصف الأول فى (−6) ونجمع الناتج على الصف الثانى.

2− نضرب الصف الأول فى (−1) ونجمع الناتج على الصف الثالث.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}- & \frac{3}{2} & 1- & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4}- & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر (-1) فى الصف الثانى والعمود الثانى واحداً صحيحاً موجباً وذلك بضرب عناصر الصف الثانى فى (-1).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

نجعل باقى عناصر العمود الثانى أصفاراً وذلك بضرب الصف الثانى فى $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم نجمع الناتج مرة على الصف الأول ومرة أخرى على الصف الثالث.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{18}{4} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر $\left(\frac{18}{4}\right)$ بالصف الثالث والعمود الثالث واحداً صحيحاً وذلك بضرب عناصر الصف الثالث فى العدد $\left(\frac{4}{18}\right)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نجعل باقى عناصر العمود الثالث أصفاراً بتنفيذ العمليتين الآتيتين :

1− بضرب الصف الثالث فى $\left(\frac{3}{2}\right)$ وجمع الناتج على الصف الثانى.

2− بضرب الصف الثالث فى (-1) وجمع الناتج على الصف الأول.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{4}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{18} & \frac{15}{18} & \frac{21}{18} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{18} & \frac{2}{18} & -\frac{4}{18} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 6 & 15 & 21 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{18}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{6}{18} & \frac{15}{18} & \frac{21}{18} \\ \frac{4}{18} & \frac{2}{18} & -\frac{4}{18} \end{bmatrix} = \text{أ}^{-1}$$

لاحظ أن : $\text{أ}^{-1}\ \text{أ} = I$

الطرف الأيمن = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 6 & 15 & 21 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{18}\right)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{18}\right) =$$

مثال (20) :

إذا كان لدينا المصفوفة : $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ}$

أثبت أن: $(\text{أ}')^{-1} = (\text{أ}^{-1})'$

الحل :

الطرف الأيمن

$$\text{أَ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\text{أَ})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{34} & \frac{6}{34} & \frac{2}{34} \\ -\frac{2}{34} & -\frac{11}{34} & \frac{19}{34} \\ \frac{10}{34} & \frac{4}{34} & -\frac{10}{34} \end{bmatrix}$$

الطرف الأيسر

$$\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{34} & \frac{19}{34} & \frac{2}{34} \\ \frac{4}{34} & -\frac{11}{34} & \frac{6}{34} \\ \frac{10}{34} & -\frac{2}{34} & -\frac{2}{34} \end{bmatrix}$$

$$(\text{أ}^{-1})' = \begin{bmatrix} -\frac{2}{34} & \frac{6}{34} & \frac{2}{34} \\ -\frac{2}{34} & -\frac{11}{34} & \frac{19}{34} \\ \frac{10}{34} & \frac{4}{34} & -\frac{10}{34} \end{bmatrix}$$

$$(\text{أَ})^{-1} = (\text{أ}^{-1})'$$

5-5 حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات :

تستخدم المصفوفات فى حل المعادلات الخطية فى متغيرين أو أكثر. وسوف نكتفى هنا بحل نظام من المعادلات فى متغيرين أو ثلاثة متغيرات. هذاويعتمد حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات على إيجاد معكوس المصفوفة بإحدى الطريقتين اللتين تم دراستهما من قبل فى هذا الباب.

أولاً : حل نظام من المعادلات الخطية فى متغيرين :

بافتراض أن لدينا المعادلتين الآتيتين :

$$\text{أ}_1\,\text{س} + \text{ب}_1\,\text{ص} = \text{جـ}_1$$

$$\text{أ}_2\,\text{س} + \text{ب}_2\,\text{ص} = \text{جـ}_2$$

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات كالآتى:

(1) نوجد مصفوفة المعاملات : $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{bmatrix}$

(2) نحدد عمود الثوابت : $\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{جـ}_1 \\ \text{جـ}_2 \end{bmatrix}$

(3) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات وذلك باستخدام طريقة العمليات المختصرة على الصفوف أو طريقة العوامل المرافقة وليكن :

$$\begin{bmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

(4) نحصل على قيمتى س ، ص باستخدام المعادلة الآتية :

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} جـ_1 \\ جـ_2 \end{bmatrix}$$

مثال (21) :

أوجد مجموعة الحل للنظام الآتى باستخدام المصفوفات.

$$2\text{ س} + 3\text{ ص} = 8$$

$$4\text{ س} + 5\text{ ص} = 11$$

الحل :

(1) نوجد مصفوفة المعاملات.

$$أ = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) مصفوفة الثوابت .

$$جـ = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

(3) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام طريقة العوامل المرافقة كالآتى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$$

$$\text{مصفوفة المرافقات} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{مبدول مصفوفة المرافقات} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة

$$\text{أ}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(4) نحصل على قيمتى س ، ص باستخدام المعادلة التالية :

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \text{أ}^{-1}\ \text{جـ}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

أى أن : $\text{س} = -\frac{7}{2}$ ، $\text{ص} = 5$

ثانياً : حل نظام من المعادلات الخطية فى ثلاثة متغيرات :

بفرض أن لدينا نظام المعادلات التالى فى ثلاثة متغيرات :

$$\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} + \text{جـ}_1 = \text{د}_1$$

$$\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} + \text{جـ}_2 = \text{د}_2$$

$$\text{أ}_3\text{س} + \text{ب}_3\text{ص} + \text{جـ}_3 = \text{د}_3$$

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات باستخدام المصفوفات كالآتى :

(i) مصفوفة المعاملات : أ = $\begin{bmatrix} ج_1 & ب_1 & أ_1 \\ ج_2 & ب_2 & أ_2 \\ ج_3 & ب_3 & أ_3 \end{bmatrix}$

(ii) نحدد عمود الثوابت : د = $\begin{bmatrix} د_1 \\ د_2 \\ د_3 \end{bmatrix}$

(iii) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات بأية طريقة وليكن :

$$\begin{bmatrix} ج_1 & ب_1 & أ_1 \\ ج_2 & ب_2 & أ_2 \\ ج_3 & ب_3 & أ_3 \end{bmatrix}^{1-} = أ^{1-}$$

(iv) $$\begin{bmatrix} د_1 \\ د_2 \\ د_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ج_1 & ب_1 & أ_1 \\ ج_2 & ب_2 & أ_2 \\ ج_3 & ب_3 & أ_3 \end{bmatrix}^{1-} = \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix}$$

مثال (22) :

حل نظام المعادلات الآتى باستخدام المصفوفات :

س + ص + ع = −1

2 س + 3 ص − ع = صفر

3 س − 2 ص + ع = 4

الحل :

(i) مصفوفة المعاملات : أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1- & 3 & 2 \\ 1 & 2- & 3 \end{bmatrix}$

(ii) عمود الثوابت : $\begin{bmatrix} 1- \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} =$ د

(iii) معكوس مصفوفة المعاملات يتم الحصول عليه بطريقة العوامل المرافقة (أو بأية طريقة أخرى) كالآتى :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1- & 3 & 2 \\ 1 & 2- & 3 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 3 \end{vmatrix} 1+ \begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} 1- \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 1 & 2- \end{vmatrix} 1 =$$

$$(9 - 4 -) + (3 + 2)\ 1 - (2 - 3)\ 1 =$$

$$17 - = 13 - 5 - 1 =$$

مصفوفة المرافقات =

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 3 \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1- & 3 \\ 1 & 2- \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2- & 3 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2- \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 2 \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1- & 3 \end{vmatrix} + \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13- & 5- & 1 \\ 5 & 2- & 3- \\ 1 & 3 & 4- \end{bmatrix} =$$

مبدول مصفوفة المرافقات =

$$\begin{bmatrix} 4- & 3- & 1 \\ 3 & 2- & 5- \\ 1 & 5 & 13- \end{bmatrix}$$

معكوس مصفوفة المعاملات :

$$أ^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -13 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -13 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ 17 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

س = 1 ، ص = −1 ، ع = −1

6−5 تطبيقات اقتصادية وتجارية : Applications

تلعب المصفوفات دوراً حيوياً وهاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالى إيجاد الحلول المناسبة لهذه العلاقات. فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها تطبيقات فى مجالات عديدة، فى الاقتصاد، والإحصاء وبحوث العمليات والعمليات الإدارية وغيرها من المجالات. فمثلاً نجد أن المصفوفات هى الأساس فى صياغة نماذج المنتج والمستخدم Input - Output Models ، وكذلك صياغة سلاسل ماركوف Markov Chains .

ومن هذا المنطلق سوف نقدم بعض الأمثلة التطبيقية حتى يلمس الدارس مدى الاستفادة من رياضة المصفوفات فى المجال التطبيقى والواقع العملى.

مثال (23) :

تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة 10 قدم وثلاجة 12 قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة 10 قدم تحتاج 4 ساعات عمل فى مرحلة التصنيع وساعتين فى مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة 12 قدم تحتاج إلى 5 ساعات عمل فى مرحلة التصنيع و 3 ساعات فى مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هى 2400 ساعة لمرحلة التصنيع، 1300 ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج فى المصنع هى استخدام كافة الطاقات المتاحة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

الحل :

يمكن تلخيص بيانات المشكلة فى الجدول التالى.

مرحلة الإنتاج **النوع**	**التصنيع**	**التشطيب**
10 قدم	4	2
12 قدم	5	3
الساعة المتاحة	2400	1300

بفرض أن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 10 قدم = س وحدة

وأن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 12 قدم = ص وحدو

فإن المعادلات الآتية تمثل النظام :

4 س + 5 ص = 2400

2 س + 3 ص = 1300

وهو نظام معادلات خطية فى متغيرين ويمكن حل هذا النظام باستخدام طريقة المصفوفات كالآتى :

مصفوفة المعاملات : أ = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

عمود الثوابت : جـ = $\begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix}$

معكوس مصفوفة المعاملات = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5- & 3 \\ 4 & 2- \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5- & 3 \\ 4 & 2- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 700 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix}$$

إذن لكى تحقق شركة الأحلام للثلاجات الخطة الإنتاجية يجب أن تنتج 350 ثلاثجة من النوع 10 قدم، 200 ثلاجة من النوع 12 قدم.

مثال (24) :

تنتج شركة صناعية نوعين من المنتجات. وكل نوع له 3 أحجام صغير، متوسط، كبير. والجدول التالى يبين الإنتاج (بالآلاف) فى المصنع الأول.

الحجم **النوع**	**صغير**	**متوسط**	**كبير**
الأول	20	28	30
الثانى	16	22	20

كما يبين الجدول التالى مستوى الإنتاج (بالآلاف) فى المصنع الثانى.

الحجم / النوع	صغير	متوسط	كبير
الأول	30	40	36
الثانى	24	20	28

والمطلوب :

(1) أكتب المصفوفة التى تعبر عن مستوى الإنتاج الكلى فى كلا المصنعين.

(2) إذا قررت الشركة أن تفتتح مصنعاً ثالثاً بطاقة إنتاجية تزيد 20% عن طاقة المصنع الثانى. أكتب المصفوفة التى تعبر عن مستوى الإنتاج فى المصنع الثالث.

(3) حدد المصفوفة التى تعبر عن حجم الإنتاج الكلى فى الشركة.

الحل :

(1) مستوى الإنتاج فى المصنعين معاً يساوى إنتاج المصنع الأول مضافاً إليه إنتاج المصنع الثانى.

$$\begin{bmatrix} 66 & 68 & 50 \\ 48 & 42 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 28 & 20 \\ 20 & 22 & 16 \end{bmatrix}$$

أى ينتج المصنعين معاً : 50 وحدة حجم صغير من النوع الأول.

68 وحدة حجم متوسط من النوع الأول.

66 وحدة حجم كبير من النوع الأول.

40 وحدة حجم صغير من النوع الثانى.

42 وحدة حجم متوسط من النوع الثانى.

48 وحدة حجم كبير من النوع الثانى.

(2) حيث أن المصنع الثالث طاقته الإنتاجية تزيد 20% عن طاقة المصنع الثانى فإنه لإيجاد طاقة المصنع الثالث الإنتاجية نضرب مستوى إنتاج المصنع الثانى فى (1.20).

$$\begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} 1.20 \quad = \quad \text{الطاقة الإنتاجية للمصنع الثالث}$$

$$\begin{bmatrix} 43.2 & 48 & 36 \\ 33.6 & 24 & 28.8 \end{bmatrix} \quad =$$

(3) الطاقة الإجمالية للشركة ككل = الطاقة الإنتاجية للمصنع الأول + الطاقة الإنتاجية للمصنع الثانى + الطاقة الإنتاجية للمصنع الثالث.

$$\begin{bmatrix} 43.2 & 48 & 36 \\ 33.6 & 24 & 28.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 28 & 20 \\ 20 & 22 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 109.2 & 116 & 86 \\ 81.6 & 66 & 68.8 \end{bmatrix} \quad =$$

تمارين على الباب الخامس

(1) إذا كان :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد :

(i) 2 أ − 3 ب + جـ

(ii) أ ب ، ب أ . هل أ ب = ب أ ؟

(iii) 3 أ − أ جـ + 5 ب

(2) (i) $2 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $2 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ماذا تلاحظ ؟

أحسب معكوس المصفوفات الآتية بطريقتين :

(3)
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

(4)
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(5)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(6)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

أضرب المصفوفات الآتية :

(7)
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(8)
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(9)
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة كل مما يأتى :

$$\begin{bmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 4 & 1- & 2 \\ 2- & 5 & 3- \end{bmatrix} 2- \quad \mathrm{I}\,3 \qquad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 2- & 1 & 0 \\ 7 & 2- & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3- & 1- & 1 \\ 5 & 4 & 2- \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 4- & 2 & 1- \\ 2 & 1- & 2 \\ 1- & 2- & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4- & 1- & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1- & 0 \end{bmatrix} 3+ \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} 2 \qquad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 2- & 3- \\ 3 & 0 \end{bmatrix} 2- \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3- \\ 4- & 6 \end{bmatrix} 3 \qquad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2- & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4- \end{bmatrix} 2+ \begin{bmatrix} 2- & 1 & 0 \\ 4 & 2- & 3 \\ 3 & 5 & 2- \end{bmatrix} 3 \qquad (15)$$

$$\mathrm{I}\,5 - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 1- & 5- & 2 \\ 3 & 2- & 0 & 1- \\ 7 & 6 & 3- & 4- \end{bmatrix} 4 \qquad (16)$$

أوجد قيم س ، ص ، ع التى تحقق المتساويات الآتية :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \text{س} \\ \text{ص} & 3 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

(18) $\begin{bmatrix}3 & -1\\ س & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ص+2 & ع\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

(19) $\begin{bmatrix}س+ص & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2س+3ص\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

أوجد قيمة كل مما يأتى :

(20) $\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$

(21) $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

(22) $\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 6\end{bmatrix}$

(23) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ -2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}$

(24) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

(25) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$

(26)
$$\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3&2\\3&-2&-1\\6&5&4\end{bmatrix}$$

(27)
$$\begin{bmatrix}4&-2&0&1\\-1&5&1&-3\\3&-1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1&2\\6&-3&-5\end{bmatrix}$$

(28)
$$\begin{bmatrix}-1&2\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\3&5\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&4&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

(29)
$$\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&4\\0&2&3\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

(30)
$$\left(\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\\3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&4\\0&1\\-3&5\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&-3\end{bmatrix}$$

(31)
$$\left(\begin{bmatrix}2&2\\0&-1\end{bmatrix}3+\begin{bmatrix}-2&1\\1&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&3\\2&0\end{bmatrix}$$

(32) أحسب : أ^2 + 2 أ − 3 I حيث :

$$أ = \begin{bmatrix}-1&1\\2&3\end{bmatrix}$$

(33) أحسب : أ^2 − 5 أ − 2 I حيث :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2- & 1- \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

(34) إذا كان :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 3 & 2- \end{bmatrix} = \text{ب} \quad ، \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

أوجد قيمة :

(i) $(\text{أ} + \text{ب})^2$

(ii) $\text{أ}^2 + 2\,\text{أ ب} + \text{ب}^2$

(iii) $(\text{أ} + \text{ب})^2 = \text{أ}^2 + 2\,\text{أ ب} + \text{ب}^2$ ؟

أوجد المصفوفة أ التى تحقق كلا من المعادلات الآتية :

(35) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{أ}$

(36) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \text{أ} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1- & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(37) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1- & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{أ} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1- & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(38) $\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{أ}$

(39) إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

أوجد قيمة س ، ص بحيث :

(i) (أ + ب)^2 = أ^2 + ب^2

(ii) (أ + ب) (أ − ب) = أ^2 − ب^2

أوجد مجموعة الحل لكل نظام من نظم المعادلات الخطية الآتية بطريقة المصفوفات :

(40) 3 س = 1 − 2 ص

2 س − ص − 3 = صفر

(41) 4 س + 5 ص = 14

3 ص + س = 7

(42) 2 (س − ص) − 5 = صفر

4 (1 − ص) − 3 س = صفر

(43) س + 2 ص − 1 = صفر

4 ص + 2 س − 3 = صفر

(44) 4 س − 3 ص = 1

5 = 3 س + ص

(45) 2 س − 5 ص = 1

3 س + 4 ص = 5

(46) 3 س − 2 ص = 4

3 ص − 4 س + 5 = صفر

(47) 2 س − 6 ص + 4 ع = 9

3 س + ص − 2 ع = 5

3 س − 9 ص + 6 ع = 3

(48) 2 س − ص − ع = 3

س − 2 ص + ع = 6

س + ص − 2ع = −3

(49) 6 س − 3 ص + 12 ع − 15 = صفر

2 س + 3 ص + 5 ع − 10 = صفر

4 س − 2 ص + 8 ع − 21 = صفر

(50) إذا كان :

أ = $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

أثبت أن : (i) (أ + ب)′ = أ′ + ب′

(ii) (أ ب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$ أ$^{-1}$

(51) إذا كان :

أ $= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

أثبت أن : (i) (أ + ب + جـ)′ = أ′ + ب′ + جـ′

(ii) (أ ب جـ)$^{-1}$ = جـ$^{-1}$ ب$^{-1}$ أ$^{-1}$

أوجد معكوس المصفوفات الآتية (إن وجد) بطريقة العمليات المختصرة على الصفوف :

(52) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(53) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(54) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(55) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 21 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(56) أوجد مجموعة الحل لكل نظام من نظامى المعادلات الآتية باستخدام الحاسب الآلى:

(أ) 6 س − 3 ص + 12 ع − 15 = صفر

2 س + 3 ص + 5 ع − 10 = صفر

4 س − 2 ص + 8 ع − 21 = صفر

(ب) 2 س − 6 ص + 4 ع = 9

3س + ص − 2 ع = 5

3س − 9ص + 6 ع = 3