

المصفوفات Matrices ٢٠١٣.١٢.٣٠

المصفوفة Matrix: عبارة عن مجموعة من الاعداد الحقيقية أو المعقدة أو منهما معاً مرتبة على شكل صفوف واعمدة بشكل مستطيل .

المصفوفة التي تملك m من الصفوف و n من الاعمدة تدعى مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وتكتب بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ \sqrt{3} & 2+i & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة من الدرجة 2×3 .

إذا كانت $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ \ln 4 & 2 & e^3 \end{bmatrix}$ فان

$$a_{11} = 1, a_{12} = -3, a_{13} = \sqrt{2}, a_{21} = \ln 4, a_{22} = 2, a_{23} = e^3$$

جمع وطرح المصفوفات: لجمع أو طرح مصفوفتين أو أكثر فاننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة وفي هذه الحالة يجب ان تكون المصفوفات من الدرجة ذاتها فمثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + (-5) & -2 + 1 \\ 0 + (-3) & 1 + 4 \\ 4 + (-6) & 3 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (-2) \\ 2 - 1 \\ 3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفة بثابت: اذا ضربت مصفوفة بثابت معين c فان جميع عناصرها تُضرب بهذا الثابت فمثلاً

$$2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 \times (-2) \\ 2 \times 0 & 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفتين: يمكن ضرب مصفوفتين اذا كان عدد الاعمدة في الاولى يساوي عدد الصفوف في الثانية فاذا

كانت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ والمصفوفة B من الدرجة $n \times r$ فان المصفوفة $C = A \cdot B$ تكون من الدرجة $m \times r$ ويمكن التعبير عن حاصل ضرب المصفوفتين A و B كما يلي :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

حيث c_{ij} عنصر في المصفوفة C و $i = 1, 2, 3, \dots, m$ and $j = 1, 2, 3, \dots, r$

ان عملية ضرب مصفوفتين ليست ابدالية اي انه ليس من الضروري ان يكون $A \cdot B = B \cdot A$

مثال (١) جد $B.A$ و $A.B$ (ان أمكن) اذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$A.B = \overrightarrow{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 0 \times (-2) + 1 \times 4 & 2 \times (-1) + 0 \times \sqrt{2} + 1 \times (-3) \\ -4 \times 3 + (-\sqrt{2}) \times (-2) + 5 \times 4 & -4 \times (-1) + (-\sqrt{2}) \times \sqrt{2} + 5 \times (-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 8 + 2\sqrt{2} & -13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \overrightarrow{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 2 + (-1) \times (-4) & 3 \times 0 + (-1) \times (-\sqrt{2}) & 3 \times 1 + (-1) \times 5 \\ (-2) \times 2 + \sqrt{2} \times (-4) & (-2) \times 0 + \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) & (-2) \times 1 + \sqrt{2} \times 5 \\ 4 \times 2 + (-3) \times (-4) & 4 \times 0 + (-3) \times (-\sqrt{2}) & 4 \times 1 + (-3) \times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & \sqrt{2} & -2 \\ -4 - 4\sqrt{2} & -2 & -2 + 5\sqrt{2} \\ 20 & 3\sqrt{2} & -11 \end{bmatrix}$$

مبدلة المصفوفة :Transpse of a Matrix

اذا كانت لدينا المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ فان مبدلة A تكون من الدرجة $n \times m$ ويرمز لها بالرمز A^T ويمكن الحصول عليها بابدال الصفوف بالاعمدة فمثلاً اذا كانت لدينا

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} \text{ فان } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

مصفوفات خاصة Special Matrices

المصفوفة المربعة :Square Matrix

وهي مصفوفة من الدرجة $m \times m$ اي تتساوى فيها عدد الصفوف مع الاعمدة كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية Diagonal Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التافهة Null Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار $A = 0$ ونكتب $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

* إذا كان $A.B = 0$ فليس من الضروري ان تكون احدى المصفوفتين صفراً فمثلاً اذا كانت

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ فان } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2+4-6 & 18-6-12 \\ 6+12-18 & 54-18-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدة Unit Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي فانها تساوي 1 ونرمز لها بالرمز

I

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* ان حاصل ضرب مصفوفة الوحدة باي مصفوفة اخرى من نفس الدرجة يساوي المصفوفة نفسها اي $A.I =$

$$I.A = A$$

المحددة للمصفوفة المربعة Determinant of Square Matrix:

اذا كانت A مصفوفة مربعة فانها تمتلك محددة ونرمز لها بالرمز $det(A)$ أو $|A|$ وتحسب كما يلي

* اذا كانت A من الدرجة 2×2 و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فان $det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$

** اذا كانت A من الدرجة 3×3 و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ فان

$$det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22} \times a_{33} - a_{32} \times a_{23}) - a_{12}(a_{21} \times a_{33} - a_{31} \times a_{23})$$
$$+ a_{13}(a_{21} \times a_{32} - a_{31} \times a_{22})$$

ويمكن حسابها بطريقة أخرى وكما يلي :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ملاحظة: $\det(A) = \det(A^T)$

مثال (٢) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ فجد $\det(A)$, $\det(B)$

الحل : $\det(A) = 12 - 2 = 10$

$$\det(B) = 5(42 - 12) - 2(0 - 24) + 1(0 - 48) = 150$$

المرافق Cofactor

لتكن A مصفوفة مربعة فان لكل عنصر من عناصرها مرافق A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

حيث $\det(M_{ij})$ هي المحددة الناتجة من المصفوفة A وذلك بحذف الصف i والعمود j

فمثلاً في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، العامل المرافق للعنصر 2 هو

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

منقول المصفوفة Adjoint of Matrix

ان منقول المصفوفة المربعة A هي المبدلة لمصفوفة مرافقات A ويرمز لها بالرمز $adj(A)$

مثال (٣) جد $adj(B)$, $adj(A)$ للمصفوفتين في المثال (٢)

الحل $A_{11} = (-1)^{1+1}(4) = 4$ $A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$$
 $A_{22} = (-1)^{2+2}(3) = 3$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 30$$
 $B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 24$ $B_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -48$

$$B_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -10$$
 $B_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 27$ $B_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$$B_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad B_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \quad B_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \\ = 30$$

$$C = \begin{bmatrix} 30 & 24 & -48 \\ 10 & 27 & -4 \\ 0 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(B) = C^T = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 24 & 27 & -15 \\ -48 & -4 & 30 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة Inverse of Matrix

لتكن A مصفوفة مربعة بحيث ان $\det(A) \neq 0$ فان معكوس A يُرمز له بالرمز A^{-1} يُحسب من القاعدة التالية :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

مثال (٤) جد A^{-1} , B^{-1} للمصفوفتين في المثال (٢)
الحل :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B) = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 24 & 27 & -15 \\ -48 & -4 & 30 \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

ملاحظة :

لاحظ في المثال السابق

$$A.A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 12-2 & -3+3 \\ 8-8 & -2+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويترك تحقيق $B.B^{-1} = B^{-1}.B = I$ كتمرين للطالب .

حل مجموعة المعادلات الخطية Solution Of a set of linear equations

ليكن لدينا نظام المعادلات التالي

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

يمكن تمثيله باستعمال المصفوفات كما يلي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ حيث } A.X = B$$

ولحل هذا النظام نضرب طرفي المعادلة بـ A^{-1}

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \rightarrow I.X = A^{-1}.B \rightarrow X = A^{-1}.B$$

مثال (٥) جد مجموعة حل النظام

$$x - y + 2z = 1$$

$$2x + y + z = -1$$

$$x + 2y - 3z = 8$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{الحل:}$$

$$X = A^{-1}.B$$

الآن يجب ان نجد A^{-1}

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 7 + 6 = -6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/2 \\ -7/6 & 5/6 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/2 \\ -7/6 & 5/6 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/6 + 1/6 + 4 \\ -7/6 - 5/6 - 4 \\ -1/2 - 1/2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x = 5 \quad , \quad y = -6 \quad , \quad z = -5$$

Eigenvalues and Eigenvectors القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان المتجه الغير صفري X يُسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A اذا كان AX مضاعفاً عددياً للمتجه X أي ان $AX = \lambda X$ حيث ان λ ثابت يُسمى القيمة الذاتية للمصفوفة A .
لايجاد القيم الذاتية للمصفوفة A نضع المعادلة $AX = \lambda X$ بالصورة $(\lambda I - A)X = 0$ والتي لها حل غير صفري اذا وفقط اذا كان $\det(\lambda I - A) = 0$.

مثال (٦) جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{الحل :}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda - 3) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

القيم الذاتية هي $\lambda = 2$ and $\lambda = 1$

$$(\lambda I - A)X = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda = 2$ فان

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2y$$

لذا فان المتجه الذاتي هو

$$X = \begin{bmatrix} -2m \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda = 1$ فان

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad x = -y$$

لذا فان المتجه الذاتي هو

$$X = \begin{bmatrix} -m \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث $m \in \mathcal{R}$

مثال (٧) جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} - (0) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)\{\lambda(\lambda - 4) + 2\} - \{-2 - (\lambda - 4)\} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) + (\lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

القيم الذاتية هي $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ and $\lambda = 3$

عندما $\lambda = 2$ فان

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$z = 0$, $x - 2y + z = 0$ and $x - 2y + 2z = 0 \rightarrow x = 2y$

لذا فان المتجه الذاتي هو

$$X = \begin{bmatrix} 2m \\ m \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda = 1$ فان

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x - z = 0$, $x - 3y + z = 0$ and $x - 2y + z = 0 \rightarrow x = -z$, $y = 0$

لذا فان المتجه الذاتي هو

$$X = \begin{bmatrix} -m \\ 0 \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda = 3$ فان

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x - z = 0$, $x - y + z = 0$ and $x - 2y + 3z = 0 \rightarrow x = z$, $y = 2z$

لذا فان المتجه الذاتي هو $X = \begin{bmatrix} m \\ 2m \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

تمارين

١. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ فجد $A + B$, $A - B$

٢. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ فجد $3A$, $A.B$, $B.A$

٣. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ فجد $\sqrt{2}B$, $A.B$, $B.A$

٤. جد معكوس المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

٥. جد مجموعة الحل لانظمة المعادلات التالية :

(a) $x + 2y + z = 4$, $3x - 4y - 2z = 2$, $5x + 3y - 5z = -1$

(b) $2x - y + 3z = 2$, $x + 3y - z = 11$, $2x - 2y + 5z = 3$

٦. جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$