
محاضرات

" مقدمة في الإحصاء "

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة في الإحصاء

الفصل الأول

مقدمة في علم الإحصاء والاحتمالات

تعريف علم الإحصاء :

هو العلم الذي يختص بالطرق العلمية لجمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وتحليلها , وذلك للوصول إلى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل.

ينقسم علم الإحصاء إلى :

- 1- **الإحصاء الوصفي :** ويختص بتنظيم البيانات وتلخيصها , والغرض من التنظيم هو المساعدة على فهم البيانات , ويشتمل الإحصاء الوصفي على توزيعات تكراريه ورسوم بيانيه وطرق حساب النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومختلف القياسات الأخرى.
- 2- **الإحصاء الاستدلالي :** ويختص بعملية اتخاذ القرارات المناسبة بشأن المجتمع بناءً على المعلومات التي تم الحصول عليها من العينة.

المتغيرات :

المتغير :

هو أي ظاهرة أو خاصية أو حدث تقوم بقياسها و تتغير قيمتها من عنصر إلى آخر.

بعض الأمثلة على المتغيرات : الوزن لمجموعة من الأطفال تحت السادسة , الطول لطلبة الجامعة الحالة التعليمية لمجموعة من المتزوجات , أما القيم التي يأخذها المتغير فتسمى بالبيانات وهي عبارة عن مجموعة المشاهدات أو الملاحظات المأخوذة أثناء الدراسة.

تنقسم البيانات إلى :

(1) **بيانات وصفية** : وهي تلك البيانات التي تصف الأفراد والمجتمع ولا يمكن قياسها مباشرة بالأرقام العددية مثل لون الشعر أو العينين وغيرها.

وتنقسم البيانات الوصفية إلى :

أ- بيانات وصفية يمكن ترتيب الصفات فيها مثل الحالة التعليمية و التقدير في أحد المواد.

ب- بيانات وصفية لا يمكن ترتيب الصفات فيها مثل تخصصات مجموعة من الطالبات.

(2) **بيانات كمية أو رقمية** : وهي تلك البيانات التي يمكن قياسها مباشرة بأرقام عددية مثل الطول أو الوزن أو العمر.

وتنقسم البيانات الكمية إلى :

أ- بيانات مستمرة أو متصلة وفيها تأخذ البيانات أي قيمة رقمية وتكون لأي درجة من الدقة وتكون ناتجة عن استخدام جهاز أو أداة القياس مثل الطول , الوزن و درجة الحرارة.

ب- بيانات متقطعة أو منفصلة وتأخذ المشاهدة فيها أعداد صحيحة ناتجة عن عملية عد أو تعداد مثل عدد الأطفال في أسرة , عدد الثمار على النباتات , عدد الطلبة في مقرر الرياضيات ... وهكذا.

المجتمع الإحصائي والعينة الإحصائية :

المجتمع :

عبارة عن جميع القيم أو المفردات التي يمكن أن يأخذها المتغير , أيضاً يعرف على أنه جميع الأفراد أو الأشياء محل الدراسة. فمثلاً إذا كانت دراستنا متعلقة بأطوال طلبة جامعة ما فإن المجتمع في هذه الحالة هو جميع الطلبة في تلك الجامعة.

ينقسم المجتمع الإحصائي إلى :

1- **محدود:** وهو الذي يكون فيه عدد محدود من الأفراد مثل عدد طلاب 100 إحص في الفصل الدراسي الأول لعام 1432 هـ.

2- **غير محدود:** وهو الذي يكون فيه عدد الأفراد غير منته (غير محدود) مثل عدد طلاب 100 إحص للسنوات العشر القادمة (على فرض استمرار المقرر).

في معظم الأحيان يكون من الصعب أو الاستحالة ملاحظة بيانات جميع أفراد المجتمع مثل البحث الذي يجري لمعرفة نسبة الأمية في دولة أو مدينة و البحث الذي يهدف إلى حصر حبات القمح المحصول , وللتغلب على ذلك يمكن اختيار جزء من المجتمع يسمى بالعينة.

وتعرف العينة:

على أنها جزء من المجتمع تختار بحيث تمثل المجتمع تمثيلاً جيداً.

أسباب ضرورة دراسة العينة بدلا من المجتمع :

- 1- صعوبة أو استحالة فحص المجتمع بالكامل وذلك بسبب:
 - أ) كبر حجمه كما في تقدير الثروة السمكية في مجتمع ما.
 - ب) الفحص قد يكون متلفاً للوحدات كما في فحص عمر لمبات لإنتاج مصنع معين.
 - ت) الفحص قد يكون مؤذياً للوحدات مثل فحص دم المريض.
- 2- التكاليف والإمكانيات (فحص المجتمع كله يكلف كثير من الجهد والمال) في إظهار النتائج.
- 3- دقة البيانات والمعلومات وذلك بسبب إمكانية استخدام اشخاص ذوي كفاءة عالية ومدربين.

المعلمة والإحصاءة :

للمجتمع مقاييس متعددة كالوسط الحسابي والتباين , كما أن للعينة مقاييس متشابهة. يميز عادة بين قيم هذه المقاييس , فكل قيمة من القيم التي تتعلق بخصائص المجتمع تسمى معلمة أما تلك التي تتعلق بالعينة فتسمى إحصاءه ومن ثم يمكن القول أن:

المعلمة : مقياس (أو قيمة عددية) يتم الحصول عليها من المجتمع مثل المتوسط لأطوال طلاب جامعة الملك سعود في العام الحالي ويرمز له بالرمز μ كذلك تباين هؤلاء الطلاب σ^2 .

أما الإحصاءة : فهي مقياس (أو قيمة عددية) يتم الحصول عليها من العينة مثل أطوال عينة من طلاب جامعة الملك سعود ويمز له بالرمز \bar{X} وكذلك تباين العينة S^2 .

مصادر جمع البيانات الإحصائية :

(1) **المصدر الأول تاريخي :** وهو ما يؤخذ من السجلات المحفوظة مثل سجلات المواليد وغيرها.

(2) **المصدر الثاني ميداني :** وهو عبارة عن البيانات المجموعة من أفراد المجتمع كله أو جزء منه بالإتصال المباشر (المقابلة الشخصية) أو غير المباشر مثل البريد أو التليفون.

الفصل الثاني

المقاييس الإحصائية

تنقسم المقاييس الإحصائية إلى قسمين:

1. مقاييس النزعة المركزية.
2. مقاييس التشتت.

أولاً: مقاييس النزعة المركزية

(1) الوسط الحسابي

وهو من أهم مقاييس النزعة المركزية والأكثر استخداماً في الإحصاء و في الحياة العملية.

تعريف:

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات للمتغير X وهي x_1, x_2, \dots, x_n فإن الوسط الحسابي (ويرمز له \bar{X}) يساوي مجموع المشاهدات مقسوماً على عددها.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

مثال (1)

أوجد الوسط الحسابي للمشاهدات التالية :

2, 3, 5, 7, 10

$$\bar{x} = 5.4$$

خصائص الوسط الحسابي

1. المجموع الجبري لإنحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفر.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

2. إذا جمعنا أو طرحنا من المشاهدات الأصلية جميعها قيمة ثابتة ولتكن a فإن الوسط الحسابي للمشاهدات بعد الجمع يساوي الوسط الحسابي قبل الجمع مضافاً إليه الثابت a .
أي أن

الوسط الحسابي (بعد الجمع) = الوسط الحسابي (قبل الجمع) + a

الوسط الحسابي (بعد الطرح) = الوسط الحسابي (قبل الطرح) - a

3. إذا ضربنا أو قسمنا من المشاهدات الأصلية جميعها قيمة ثابتة ولتكن b فإن الوسط الحسابي للمشاهدات بعد الضرب يساوي الوسط الحسابي قبل الضرب مضروباً في الثابت b .
أي أن

الوسط الحسابي (بعد الضرب) = الوسط الحسابي (قبل الضرب) * b

الوسط الحسابي (بعد القسمة) = الوسط الحسابي (قبل القسمة) \ b

مميزات الوسط الحسابي

1. مقاييس سهل ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.
2. يأخذ في الاعتبار جميع القيم محل الدراسة.
3. هو أكثر المقاييس فهماً في الإحصاء.

عيوب الوسط الحسابي

1. يتأثر بالقيم المتطرفة (وهي القيم الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً)
2. يصعب حسابه في حالة البيانات الوصفية.
3. يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة حيث يتطلب معرفة مركز كل فئة.

(2) الوسيط

عند ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً يكون الوسيط هي القيمة التي تقع قبلها 50% من المشاهدات في الترتيب و 50% من المشاهدات بعدها في الترتيب أي أنها القيمة التي تقسم البيانات إلى قسمين متساويين (المشاهدة التي تقع المنتصف).

مميزات الوسيط

1. لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
2. يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية التي يمكن ترتيبها.
3. يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة للبيانات الكمية.

عيوب الوسيط

1. لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.
2. لا يسهل التعامل معه في التحاليل الإحصائية والرياضية.

(3) المنوال

وهو القيمة الأكثر تكراراً بين البيانات (المشاهدات). وينقسم المنوال إلى:

1. عديم المنوال (أي لا يوجد منوال).
2. وحيد المنوال (أي يوجد منوال واحد فقط).
3. متعدد المنوال (أي يوجد أكثر من منوال).

مميزات المنوال

1. هو مقياس من السهل حسابه.
2. يمكن إيجاده للبيانات الكمية والوصفية والتوزيعات التكرارية المفتوحة.

عيوب المنوال

1. لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.
2. قد يكون لبعض البيانات أكثر من منوال وبذلك لا يمكن تحديد قيمة واحدة للمنوال.
3. بعض البيانات لا يكون لها منوال.

ثانياً: مقاييس التشتت

مقاييس النزعة المركزية غير كافية للمقارنة بين طبيعة البيانات الإحصائية فبالتالي وجدت مقاييس التشتت وهي

(1) المدى

وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.
المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

مثال (2)

أحسبي المدى للقيم التالية : 90, 110, 50, 100, 80
المدى = 110 - 50 = 60

مميزات المدى

1. من السهل حسابه.
2. يعطي فكرة سريعة عن طبيعة البيانات.
3. يستخدم كثيراً لمراقبة الإنتاج ووصف الأحوال الجوية.

عيوب المدى

1. يعتمد على قيمتين فقط ويهمل باقي البيانات.
2. يتأثر بالقيم المتطرفة فهو مقياس تقريبي لا يعتمد عليه.

(2) نصف المدى الربيعي

هو نصف الفرق بين أكبر ربع وأصغر ربع

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

حيث هناك ثلاث ربيعات (Quartiles) وهي كالتالي

Q_1 : الربيع الأول : القيمة التي تكون فيها 25% من البيانات أقل منها (قبلها) و 75% من البيانات أكبر منها (بعدها).

Q_2 : الربيع الثاني : القيمة التي تكون فيها 50% من البيانات أقل منها (قبلها) و 50% من البيانات أكبر منها (بعدها) وهو يساوي الوسيط.

Q_3 : الربيع الثالث : القيمة التي تكون فيها 75% من البيانات أقل منها (قبلها) و 25% من البيانات أكبر منها (بعدها).

مميزات نصف المدى الربيعي

1. يتخلص من القيم المتطرفة.
2. يمكن حسابه للتوزيعات التكرارية المفتوحة.

عيوب نصف المدى الربيعي

1. لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.
2. لا يسهل التعامل معه في التحاليل الإحصائية.

(3) التباين (Variance) و الانحراف المعياري (St.deviation) :

الانحراف المعياري هو متوسط مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (S) وهو الجذر التربيعي للتباين والذي يرمز له بالرمز (S^2) .

أي أن

$$\text{التباين} = (\text{الانحراف المعياري})^2 .$$

خصائص الانحراف المعياري

1. إذا جمعنا (أو طرحنا) مقدار ثابت من جميع القيم فإن الانحراف المعياري الجديد بعد الجمع (أو الطرح) هو نفس الانحراف المعياري قبل الجمع (أو الطرح) وكذلك بالنسبة للتباين.

2. إذا ضربنا (أو قسمنا) مقدار ثابت وليكن a من جميع القيم فإن الانحراف المعياري الجديد بعد الضرب (أو القسمة) يساوي الانحراف المعياري قبل الضرب (أو القسمة) مضروب (أو مقسوم) في a (على).

أي أن

الانحراف المعياري (الجديد) = الانحراف المعياري (قبل الضرب) * a .

الانحراف المعياري (الجديد) = الانحراف المعياري (قبل القسمة) / a .

3. إذا ضربنا (أو قسمنا) مقدار ثابت وليكن a من جميع القيم فإن التباين الجديد بعد الضرب (أو القسمة) يساوي التباين قبل الضرب (أو القسمة) مضروب (أو مقسوم) في a^2 (على).

أي أن

التباين (الجديد) = التباين (قبل الضرب) * a^2 .

التباين (الجديد) = التباين (قبل القسمة) / a^2 .

4) معامل الاختلاف

هو مقياس لا يعتمد على وحدات المقارنة، ويستخدم لإيجاد أي المتغيرين أو المجموعتين أكثر تشتتاً أو أكثر إختلافاً أو أقل تجانساً. مثال على ذلك مقارنة الطول مع الوزن.

ويرمز له بالرمز C.V وتحسب قيمته بطريقتين

1. معامل الاختلاف = الانحراف المعياري \ الوسط الحسابي.

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}}$$

2. معامل الاختلاف = (الرابع الثالث - الربع الأول) \ (الرابع الثالث + الربع الأول)

$$C.V = \frac{(Q_3 - Q_1)}{(Q_3 + Q_1)}$$

(وتستخدم أي من الطريقتين حسب معطيات السؤال)

مثال (3)

إذا كان لدينا المجموعتان:

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
الوسط الحسابي	170.42
الانحراف المعياري	9.68

أي من المجموعتين أكثر تشتتاً أو أقل تجانساً؟

ملاحظة: لا يمكن المقارنة عن طريق التباين لأن الوحدات في هذا السؤال غير معروفة.

الإجابة:

بما أن الوحدات غير معروفة وأن معامل الاختلاف هو مقياس لا يعتمد على وحدات المقارنة فيمكن استخدامه في هذا المثال.

معامل الاختلاف (المجموعة الأولى) = الانحراف المعياري \ الوسط الحسابي

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{8.07}{68.2} = 0.1183$$

معامل الاختلاف (المجموعة الثانية) = الانحراف المعياري \ الوسط الحسابي

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{9.68}{170.42} = 0.057$$

بما أن قيمة معامل الاختلاف للمجموعة الأولى أكبر فإن المجموعة الأولى هي الأكثر تشتتاً وأقل تجانساً من المجموعة الثانية.

(5) الدرجة المعيارية

هي مقارنة بين شخص أو مفردة في المجموعة الأولى مع شخص أو مفردة في المجموعة الثانية، مثال على ذلك مقارنة طول فاطمة بين طالبات فصلها مع طول أختها أسماء بين طالبات فصلها.

تعريف

إذا كان لدينا مجموعه من المشاهدات للمتغير X وهي X_1, X_2, \dots, X_n والتي متوسطها (وسطها الحسابي) هو \bar{X} وانحرافها المعياري S فإن الدرجة المعياريه Z تحسب عن طريق

الدرجة المعياريه = (القيمة - وسطها الحسابي) \ انحرافها المعياري

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S}$$

مثال (4)

حصل طالب على 82 درجة في مقرر الإحصاء حيث متوسط الدرجات للإحصاء هو 75 وانحراف معياري 10 درجات, وحصل على 89 درجة في مقرر الرياضيات وكان متوسط الدرجات للرياضيات هو 81 والانحراف المعياري 16 درجة. في اي المقررين كانت درجة استيعاب هذا الطالب أعلى؟

مثال (5)

في دراسة على أعمار عينة من طالبات الجامعة, وجد أن متوسط عمر الطالبة في كلية الآداب هو 21 سنة والانحراف المعياري لها هو 5 سنوات, بينما يبلغ متوسط عمر الطالبة في كلية العلوم 19 سنة والتباين لها 9 سنوات.

1- أي من المجموعتين أكثر تجانساً في العمر؟

2- إذا كان عمر طالبة في كلية الآداب هو 22 سنة وعمر طالبة في كلية العلوم هو 20 سنة

فأي الطالبتين يعتبر عمرها أعلى من المعدل.

مثال (6)

إذا كان المستوى التعليمي لعدد من الزوجات هو:

ثانوي – ابتدائي – ثانوي – جامعي – متوسط – ابتدائي – ابتدائي.

احسبي الوسيط لمستوى التعليم؟

مثال (7)

أوجد الوسيط لكل من البيانات التالية:

1- 60, 72, 40, 80, 63

2- 3, 2, 5, 4, 1, 1

مثال (8)

البيانات التالية لعينة من 10 طالبات في أحد معاهد اللغات حسب اللغة التي تدرسها:

فرنسي – إنجليزي – أسباني – إسباني – إنجليزي – إنجليزي – فرنسي – ألماني – إيطالي

احسبي منوال اللغة؟

مثال (9)

أوجد المنوال لكل من البيانات التالية:

1- 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

2- 51.6, 48.7, 50.3, 49.5, 48.9

3- 2, 4, 6, 2, 6, 1, 7

الفصل الثالث

تنظيم البيانات وعرضها جدولياً

مقدمة:

عند جمع البيانات الخاصة بدراسة ظاهرة ما فإنها تكون بيانات أولية لا يمكن الاستفادة منها , لذلك فإنها غالباً ما تنظم وتلخص في جداول مبسطة أو يعبر عنها في صورة أشكال ورسوم بيانية لكي يسهل فهمها ودراستها وتحليلها.

أول مرحلة للتحليل الإحصائي تتكون من تصميم جدول التوزيع التكراري وهو عبارة عن جدول يلخص البيانات الأولية فيوزعها على فئات ويحدد عدد الأفراد الذين ينتمون إلى كل فئة.

تكوين جدول التوزيع التكراري للبيانات الوصفيه:

لتكوين جدول التوزيع التكراري ينبغي أن يعمل أولاً جدول يتم فيه تفريغ البيانات الإحصائية , وهو يتكون من ثلاث خانوات:

الأولى : تكتب فيها الصفة للبيانات الوصفيه وتوضع فيها الصفات التي لدينا (مرتبة إذا أمكن).

الثانية : العلامات وهي عبارة عن حزم مكونه من 5 خطوط أربعة رأسية والخامسه مائله (وبذلك تصبح الحزمة على الصورة |||) وهي تمثل البيانات التي لدينا.

أما الخانة الثالثة : فهي مجموع العلامات وتسمى بالتكرار.

ومن هذا الجدول نكون جدولاً آخر يسمى بالجدول التكراري أو جدول التوزيع التكراري وهو يتكون من الخانة الأولى والثالثة من جدول تفريغ البيانات الإحصائية.

التكرار النسبي :

هو حاصل قسمة التكرار على المجموع الكلي للتكرارات.

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{التكرار}}{\text{المجموع}}$$

التكرار المنوي:

هو حاصل قسمة التكرار على المجموع الكلي للتكرارات مضرب في مائه.

$$100X \frac{\text{التكرار}}{\text{المجموع}} = \text{التكرار المنوي}$$

المتغير	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المنوي
المجموع	حجم العينة = n	1	100

مثال (1):

عينة مكونة من 40 طيبة في مستشفى الملك خالد الجامعي كانت تخصصاتهن كالتالي:

أطفال باطني باطني باطني باطني باطني باطني
عيون أنف و أذن أطفال باطني باطني باطني باطني باطني
أنف و أذن أطفال باطني باطني باطني باطني باطني باطني
باطني باطني أطفال أنف و أذن باطني باطني باطني باطني
أطفال باطني أنف و أذن أنف و أذن باطني باطني باطني باطني

اسم المتغير : التخصص المجتمع: طبيبات مستشفى الملك خالد الجامعي

حجم العينة : 40 نوع البيانات : وصفي

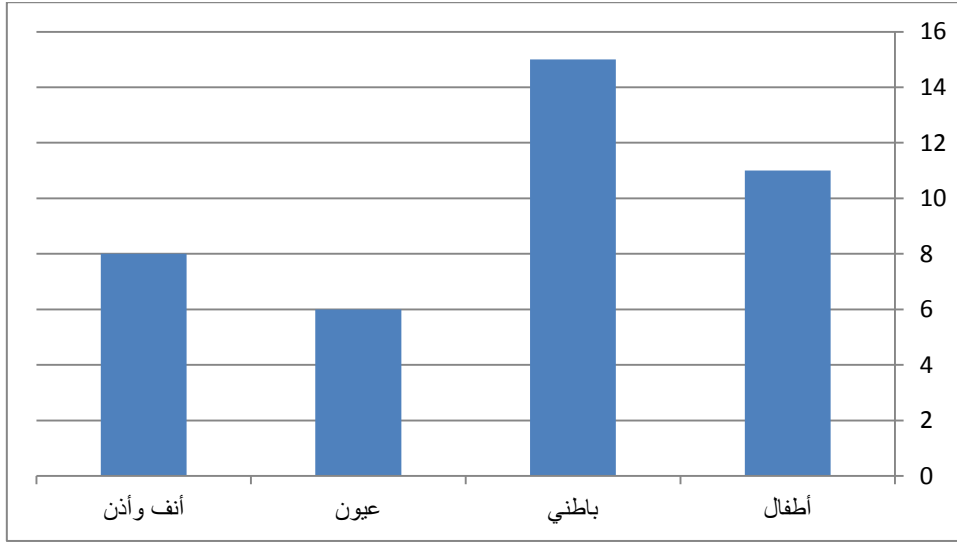
جدول تفريغ البيانات الإحصائية

التخصص	العلامات	التكرار
أطفال	IIIIIIIII	11
باطني	IIIIIIIIIIIIIIII	15
عيون	IIIII	6
أنف و أذن	IIIIIIII	8
المجموع	40	40

جدول التوزيع التكراري.

التكرار النسبي	التكرار	التخصص
0.275	11	أطفال
0.375	15	باطني
0.15	6	عيون
0.2	8	أنف وأذن
1	40	المجموع

التمثيل البياني : الإعمدة البيانية



- 1) ما هو عدد الطبيبات اللاتي تخصصهن أنف وأذن؟
- 2) ما هو عدد الطبيبات اللاتي تخصصهن عيون؟
- 3) ما نسبة الطبيبات اللاتي تخصصهن باطني؟
- 4) ما التكرار النسبي للطبيبات اللاتي تخصصاتهن أطفال و عيون؟
- 5) ما النسبة المئوية للطبيبات اللاتي تخصصهن عيون؟
- 6) احسبي المنوال؟

مثال (2)

سئلت مجموعة من الطالبات عن مستوى اختبار ما فكانت إجابتهن كالتالي:

متوسط, متوسط, صعب, سهل, متوسط, فوق المتوسط, صعب, فوق المتوسط, صعب, متوسط,
سهل, صعب, فوق المتوسط, سهل, صعب.

(1) مستوى الإختبار الأكثر شيوعاً.

(2) الوسيط لمستوى الإختبار.

(3) إعرضي هذه البيانات في جدول تكراري ثم مثليه بيانياً.

مثال (3)

في دراسة لنوع العصير المفضل لدى الأطفال أخذت عينة من 18 طفل في المرحلة الابتدائية من إحدى مدارس الرياض وكانت البيانات التالية:

عصير تفاح – عصير مانجو – عصير فراولة – عصير برتقال – عصير فراولة – عصير
مانجو – عصير تفاح – عصير فراولة – عصير ليمون – عصير مانجو – عصير مانجو –
عصير فراولة – عصير فراولة – عصير ليمون – عصير برتقال – عصير مانجو – عصير
فراولة – عصير مانجو.

(1) إعرضي هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

(2) أحسبي المقياس المناسب من مقاييس النزعة المركزية.

(3) مثلي هذه البيانات بيانياً.

الفصل الرابع

مبادئ الاحتمالات

مقدمة

نظرية الاحتمال تعتبر أساس علم الإحصاء, وكلمة إحتمال تستخدم كثيراً في حياتنا اليومية فمثلاً يقال أن هناك إحتمال كبير أن تظهر نتيجة الإختبار غداً. أو يقال إحتمال نجاحي في هذه المادة ضعيف وغيره من الأمثلة. أما من الناحية العلمية فإن إحتمال وقوع حدث ما هو قيمة عددية بين الصفر والواحد كلما إقترب من الواحد كلما زاد فرصة وقوعه وكلما إقترب من الصفر قلت فرصة حدوثه.

هذا ومعظم أمثلة الاحتمالات مبنية على التجارب التالية:

- 1) تجارب حجر النرد: وهو عبارة عن مكعب له ستة أوجه كل وجه يأخذ رقماً من 1 إلى 6.
- 2) تجارب قطعة النقود: لقطعة النقود وجهان الصورة ونرمز لها ب H والكتابة ونرمز لها ب T.
- 3) تجارب صندوق الكرات: وهو صندوق يحتوي على كرات مختلفة الألوان.

مصطلحات وتعريف

- 1) التجربة العشوائية: هي التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقاً ولكن لا يمكن لأحد التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج أولاً.
أمثلة على التجربة العشوائية
1- رمي قطعة النقود.
2- رمي حجر النرد.
3- قياس ضغط الدم لمريض.
4- نوع المولود (ولد أو بنت).
- 2) فضاء أو فراغ العينة : هو مجموعة جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز S.
مثال : عند رمي حجر النرد مرة واحدة فإن $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

في التجربة العشوائية التي تمر بأكثر من مرحلة يمكن إيجاد فراغ العينة بأحد الطرق التالية:

1- الشجرة البيانية.

2- الجداء الديكارتي.

3- الشبكة التربيعية.

مثال (1)

أوجد فراغ العينة عند رمي قطعة نقود مرتين

مثال (2)

أوجد فراغ العينة لتجربة عشوائية مكونة من إلقاء حجر نرد ثم سحب كرت عشوائياً من بين 3 كروت عليها الأرقام 1, 3, 5.

مثال (3)

أوجد فراغ العينة لتجربة عشوائية مكونة من إختيار بطاقتين مع إعادة من مجموعة من ثلاث بطاقات عليها الأرقام 1, 2, 3. وأوجد فراغ العينة إذا كان الإختيار بدون إعادة.

مثال (4)

ثلاث سيدات ينتظرون الولادة, إكتبي فراغ العينة لنوع المواليد الثلاث.

تمرين واجب:

يرغب مكتب لاستقدام الأيدي العاملة في استقدام أفراد بالشروط التالية:

- (1) النوع (ذكر – أنثى).
- (2) المؤهل (جامعي – متوسط).
- (3) اللغة (عربي – انجليزي).

اكتبي فراغ العينة الذي يمثل الإمكانات المختلفة لخصائص الفرد المطلوب.

أنواع فراغ العينة

- (1) فراغ منته وهو الذي يحتوي على عدد محدود من العناصر.
 - (2) فراغ غير منتهي وقابل للعد, مثال: $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.
 - (3) فراغ غير منتهي وغير قابل للعد, مثال: $S = \{X: \text{عدد حقيقي}\}$.
- وسوف ندرس فقط فراغ العينة من النوع الأول أي فراغ منته.

الحادثة أو الحدث

تعرف الحادثة A بأنها مجموعة جزئية من فراغ العينة S . ويقال أن الحادثة قد وقعت إذا ظهر (عند إجراء التجربة) واحد أو أكثر من النتائج المحتملة للتجربة التي تكون الحادثة A .

مثال : إذا كان فراغ العينة $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ النتائج من رمي حجر نرد مرة واحدة وكانت الحادثة B تمثل ظهور عدد زوجي فإن $B = \{2, 4, 6\}$ وتكون $B \subset S$.

ملاحظة : فراغ العينة S يعتبر مجموعة جزئية من نفسه , أي أن $S \subset S$, وتكون S هي حدث وتسمى الحادثة الأكيدة. وكذلك $\phi \subset S$ وتسمى بالحادثة المستحيلة.

مثال (5)

أحسبي الحوادث التالية وعدد عناصر كل حادثة بالنسبة للتجربة العشوائية المتمثلة في رمي قطعة نقود مرتين.

$$A = \{ \text{الحصول على صورة من الرمية الأولى} \}$$

$$B = \{ \text{الحصول على كتابة من الرمية الأولى} \}$$

$$C = \{ \text{الحصول على صورة واحدة على الأقل} \}$$

$$D = \{ \text{الحصول على كتابة على الأكثر} \}$$

خلال دراسة الإحتمالات نحتاج إلى الحوادث التالية:

(1) اتحاد الحادثتين A و B أي $(A \cup B)$:

تتكون الحادثة $A \cup B$ من عناصر فراغ العينة S الموجودة إما في A أو B أو في الإثنين معاً. وقوع الحادثة $A \cup B$ يعني وقوع إحداهما على الأقل (حدوث إحداهما أو كلاهما).

(2) تقاطع الحادثتين A و B أي $(A \cap B)$:

تتكون الحادثة $A \cap B$ من عناصر فراغ العينة S الموجودة في كلا من A و B. وقوع الحادثة $A \cap B$ يعني وقوع A و وقوع B (وقوع الإثنين معاً).

(3) الحادثة المكملة A^C :

تتكون من عناصر فراغ العينة S الغير موجودة في الحادثة A. وقوع A^C يعني عدم وقوع A. ويرمز له ايضاً بالرمز \bar{A} .

مثال (6)

احسبي الحوادث التالية وعدد عناصرها بالنسبة لفراغ العينة S الناتج من رمي حجر نرد مرتين متتاليتين : الرمية الأولى X , الثاني Y .

$$A = \{(x,y) : X+Y < 4\}$$

$$B = \{(x,y) : x=y\}$$

$$C = \{(x,y) : x=5\}$$

$$D = \{(x,y) : x+y = 1\}$$

$$E = \{(x,y) : x > y\}$$

ثم أحسبي الأحداث التالية : $A^C, A \cap B, B \cup C, D \cap E, D \cup E, E^C \cap C, E^C \cup B$ وعدد عناصرها.

مثال (7)

الحادثتان A و B معرفتان على فراغ العينة لتجربة عشوائية. عبري بكلمات واضحة للحوادث التالية:

$$A^c, A \cup B, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cup B^c, (A \cup B)^c, (A \cap B)^c$$

تمرين واجب

رمي حجر نرد وقطعة نقود, إكتبي فراغ العينة للحوادث التالية وعدد عناصرها:

A : ظهور عدد زوجي على حجر النرد.

B : ظهور H على قطعة النقود.

C : ظهور H على قطعة النقود و عدد أقل من 3 على حجر النرد.

D : ظهور T على قطعة النقود و عدد لا يقل عن 3 على حجر النرد.

ثم أحسبي

$$A^c, A \cap B, A \cup C, A \cap D^c, A \cap B^c, (A \cup C)^c, (A \cap B)^c$$

قبل الدخول في تعريف الإحتمال نعرض بعض الحالات

(1) الحالات المواتية (المفضلة) :

هي الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث المراد دراسته.

مثال: في حالة رمي حجر النرد فإذا كان الحادث المطلوب هو الحصول على عدد زوجي فالحالات التي تحقق ظهور هذه الحادثة هي الحصول على 2 أو 4 أو 6 فهذه الحالات الثلاثة تسمى الحالات المواتية.

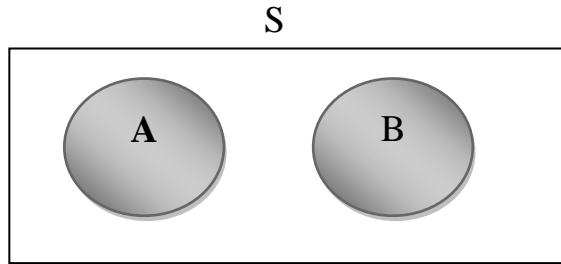
(2) الحالات المتماثلة أو المتساوية الفرص :

هي الحالات التكافئة و المتساوية في إمكانية حدوثها.

أمثلة: رمي قطعة نقود متزنة, رمي حجر نرد متجانس, سحب كرة من صندوق به مجموعة من الكرات المتساوية في الحجم والكثافة والملمس.

(3) الحالات المتنافية:

يقال عن الحادثتين A و B متنافيتين إذا إستحال وقوع الحادثين معاً أي عندما يكون $A \cap B = \emptyset$ وتمثل بأشكال فن.



(4) الحوادث الشاملة :

إذا كان لدينا مجموعة من الحوادث A_1, \dots, A_n عند إجراء تجربة عشوائية ما فإنه يقال لهذه الحوادث السابقة شاملة إذا كان لا بد من حدوث أحدهم عند إجراء هذه التجربة أي عندما يكون : $U_{i=1}^n A_i = S$.

مثال: عند إلقاء حجر نرد فإن الحوادث البسيطة

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

تعتبر حوادث شاملة.

التعريف التقليدي للاحتمال

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متماثلة أي أنها متساوية الفرصة في الظهور وكان فراغ العينة S يحتوي على عدد منته من العناصر فإن

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

حيث $n(A)$ عدد عناصر الحدث A .

$n(S)$ عدد عناصر فراغ العينة.

مثال (8)

اعتبري التجربة العشوائية مكونة من رمي قطعة نقود وزهرة نرد.

(1) إكتبي فراغ العينة.

(2) احسبي الإحتمالات للأحداث التالية:

A : الحصول على صورة.

B : الحصول على الوجه الذي عليه رقم 3.

C : الحصول على صورة ورقم أكبر من 4.

D : الحصول على صورة ورقم أقل من 3.

ثم احسبي

$$P(A^c), P(A \cap B), P(A \cup B), P(A^c \cap D), P(A \cap B^c), P(A \cup B)^c, P(A \cup C)^c$$

مثال (9)

أعلنت الجامعة عن حاجتها إلى عدد من الموظفين وبعد تصنيف المتقدمات لهذه الوظيفة وفقاً للمؤهل ولسنوات الخبرة حصلنا على الجدول التالي:

	تحمل شهادة جامعية	لا تحمل شهادة جامعية	المجموع
لديها خبرة	20	40	60
ليس لديها خبرة	10	30	40
المجموع	30	70	100

اخترنا شخصاً بصورة عشوائية

- (1) ما احتمال أن تكون ممن يحملن شهادة جامعية.
- (2) ما احتمال أن تكون لديها خبرة و لا تحمل شهادة جامعية.

مسلمات الإحتمالات

إحتمال الحدث A ويرمز له بالرمز $P(A)$ وهو عدد يحقق المسلمات التالية:

$$(1) \text{ لكل حادثة } A \text{ فإن } P(A) \geq 0$$

$$(2) \text{ حيث } S \text{ هو فراغ العينة فإن } P(S) = 1$$

$$\text{من 1 و 2 فإن } 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(3) \text{ لكل متتابعة من الأحداث } A_1, A_2, \dots \text{ متنافية مثنى (أي } A_i \cap A_j = \emptyset \text{)}$$

$$\text{فإن } P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

وهذا يعني أن الحوادث المتنافية إحتمال اتحادها يساوي مجموع احتمالاتها.

بعض النتائج الأساسية لمسلمات الإحتمال

$$1) P(\emptyset) = 0$$

$$2) P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$3) P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$4) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال (11)

إذا كان إحتمال نجاح طالبة في مقرر ما هو $\frac{3}{4}$. ما هو إحتمال رسوبها في هذا المقرر؟

مثال (12)

إذا كان $P(A \cap \bar{B}) = 0.3, P(A \cap B) = 0.2, P(A \cup B) = 0.9$

احسبي الإحتمالات التالية $P(A), P(B), P(\bar{A} \cap \bar{B}), P(\bar{B})$

مثال (13)

إذا كان إحتمال النجاح في مقرر A هو 0.6 و إحتمال النجاح في مقرر B هو 0.7 واحتمال النجاح في مقرر واحد على الأقل هو 0.9 . احسبي الإحتمالات التالية:

- (1) إحتمال النجاح في مقرر A ومقرر B.
- (2) إحتمال النجاح في مقرر A فقط.
- (3) إحتمال النجاح في مقرر B وعدم النجاح في مقرر A.
- (4) إحتمال عدم النجاح في مقرر A وقرر B.
- (5) إحتمال النجاح في مقرر B أو عدم النجاح في مقرر A.

تمرين واجب

من بين 200 طالبة من طالبات العلوم وجد أن 100 طالبة منهن يدرسن الرياضيات, 90 يدرسن الكيمياء, 20 لا يدرسن أي من الرياضيات أو الكيمياء, اختيرت طالبة عشوائياً ما إحتمال أن تكون:

- (1) تدرس الكيمياء فقط.
- (2) تدرس الكيمياء والرياضيات.
- (3) تدرس الكيمياء أو الرياضيات.

ملاحظة

ذكرنا سابقاً أن الأحداث المتنافية هي التي يستحيل حدوثهما معاً, فإذا كان A و B حدثان متنافيان فإن $A \cap B = \emptyset$ وينتج عنه $P(A \cap B) = 0$.

مثال (14)

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}, P(A) = \frac{1}{2}$$

فأوجد احتمال B إذا كانت A و B حدثين متنافيين.

الاحتمال الشرطي

إن دراسة الإحتمال الشرطي تعني حساب إحتمال حادث ما إذا علم حدوث حادث آخر. فإذا كان A و B حدثين فإن إحتمال حدوث A علماً بأن B قد حدث فعلاً يعبر عنه $P(A|B)$ ويسمى بالإحتمال الشرطي لـ A إذا كانت B قد حدثت ويعرف بـ

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

بشرط أن يكون $P(B) > 0$. الحدث B في $P(A|B)$ هو فراغ العينة الجديد ويسمى الفراغ المختزل. نوضح حساب الإحتمال الشرطي بالإحتمالات التالية.

مثال (15)

اعتبري التجربة العشوائية المكونة من رمي حجر نرد ولتكن

A : حادثة الحصول على 2.

B : حادثة الحصول على عدد زوجي.

احسبي احتمال A إذا علمتي بوقوع B .

مثال (16)

صنفنا مائة شخص وفقاً للنوع (ولد , بنت) ووفقاً للإصابة بعمى الألوان فكانت النتيجة

	مصاب	غير مصاب	المجموع
ولد	2	58	60
بنت	1	39	40
المجموع	3	97	100

احسبي الإحتمالات التالية

- 1) إذا علنا أن الشخص المختار بنت ما إحتمال أن تكون مصابة بمرض عمى الألوان.
- 2) ما إحتمال أن الشخص المختار ولد إذا علمنا أنه مصاباً.

تمرين واجب

إذا علم أن $P(A \cup B) = 0.8, P(\bar{A}) = 0.6, P(B|A) = 0.25$

أحسبي $P(A), P(A \cap B), P(B), P(\bar{A} \cup B), P(\bar{A} \cap \bar{B}), P(\bar{A}|\bar{B})$

مثال (17)

صنفت مجموعة من 100 مريض راجعوا قسم الإسعاف خلال شهر في أحد المستشفيات في مدينة الرياض حسب النوع وحسب تقرير الطبيب إذا كانت الحالة مستعجلة أم لا. فصلنا على الجدول التالي

النوع	ذكر	انثى	المجموع
تقرير الطبيب	M	F	
E مستعجلة	25	45	70
E ^C غير مستعجلة	20	10	30
المجموع	45	55	100

إذا تم اختيار أحد المراجعين عشوائياً فإن

(1) إحتمال أن تكون المراجعة أنتى وحالتها غير مستعجلة هو

$$(0.33 \quad 0.10 \quad 0.30)$$

(2) إحتمال أن يكون المراجع ذكر أو حالته مستعجلة هو

$$(0.00 \quad 0.90 \quad 1.15)$$

(3) إحتمال أن تكون المراجعة أنتى إذا علم أن حالتها غير مستعجلة هو

$$(0.10 \quad 0.33 \quad 0.45)$$

(4) إحتمال أن يكون المراجع ذكر أو أنتى هو

$$(0.00 \quad 1.00 \quad \emptyset)$$

مثال (18)

إذا علم أن $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$

(1) إذا كان $P(A \cup B) = 0.9$

فإن الحدثان A و B تكونا

(2) إذا كان $P(A \cup B) = 0.72$

فإن الحدثان A و B تكونا

(3) إذا كان $P(A \cup B) = 0.6$

فإن الحدثان A و B تكونا

(4) هل الحادثان A و B شاملتان؟ ولماذا؟

مثال (19)

إحتمال أن يحصل مشترك في المسابقة لتجويد القرآن وتفسيره على جائزة التجويد هو 0.16, وأن يحصل على جائزة التفسير هو 0.30, وإحتمال أن يحصل عليهما معاً هو 0.09. أحسبي

(1) إحتمال أن المشترك سوف لا يحصل على جائزة التجويد علماً أنه حصل على جائزة التفسير.

(2) إحتمال أن المشترك سوف يحصل على جائزة التفسير علماً أنه لم يحصل على جائزة التجويد.

الحوادث المستقلة

الحادثتين A و B حدثين مستقلين إذا كان حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث أو عدم حدوث الآخر. أي أن

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ومن نستنتج إذا كان الحادثين A و B حدثين مستقلين فإن

$$P(A|B) = P(A) \quad -1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = P(A) + P(B)P(\bar{A}) \quad -2$$

-3 A و B حدثين مستقلين $\Leftrightarrow A^C$ و B حدثين مستقلين $\Leftrightarrow A$ و B^C حدثين مستقلين $\Leftrightarrow A^C$ و B^C حدثين مستقلين.

مثال (20)

إذا كان

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.30, P(\bar{B}) = 0.40, P(A) = 0.20$$

هل الحدثين A و B حدثين مستقلين؟

مثال (21)

إذا كان $P(A) = 0.5, P(A \cup B) = 0.9$ أوجد قيمة $P(B)$ إذا كان

(1) A و B حدثين متنافيين.

(2) A و B حدثين مستقلين.

(3) A مجموعة جزئية من B.

مثال (22)

إذا كان A و B حدثين مستقلين وكان $P(A|B) = 0.3, P(B|A) = 0.4$ فأوجد كلاً من

$$P(A), P(B), P(A \cap B), P(\bar{A} \cap B), P(A \cap \bar{B}), P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

مثال (23)

إذا كان إحتمال أن يصيب محمد هدفاً معين هو $\frac{3}{4}$ و إحتمال أن يصيب أحمد الهدف نفسه هو $\frac{1}{3}$.
أوجدي الإحتمالات التالية:

(1) إحتمال أن يصيبا الهدف معاً.

(2) على الأقل يصيب الهدف أحدهما.

(3) محمد يصيب الهدف وأحمد لا يصيبه.

(4) إذا علم أن محمد لم يصيب الهدف , ما إحتمال أن يصيبه أحمد.

تمرين واجب

إذا كان A و B حدثين معرفين على فراغ العينة S وكان

$$P(B|A) = \frac{1}{4}, P(A|B) = \frac{1}{3}, P(A) = \frac{1}{6}$$

أوجدي $P(A \cap B), P(B), P(A \cup B), P(\bar{A} \cup \bar{B})$

هل \bar{A} و \bar{B} مستقلان, هل A و B متنافيين, هل A و B حدثين شاملين.

تمرين واجب

إذا كان $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.8, P(A \cap \bar{B}) = 0.3, P(A \cup \bar{B}) = 0.6$

أوجدي $P(A \cap B), P(B), P(A \cup B), P(\bar{A}|B)$

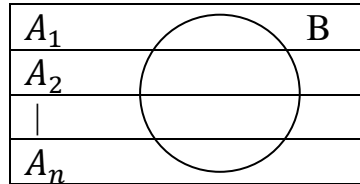
هل A و B مستقلين ولماذا, هل A و B متنافيين ولماذا, هل A و B حدثين شاملين ولماذا؟

نظرية بيز

إذا كان لدينا مجموعة الحوادث A_1, A_2, \dots, A_n الشاملة والمتنافية

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S, A_i \cap A_j = \emptyset$$

وكان B حدث معرف على فراغ العينة نفسه بحيث $P(B) \neq 0$ كما في الرسم التالي



ومنه نستنتج

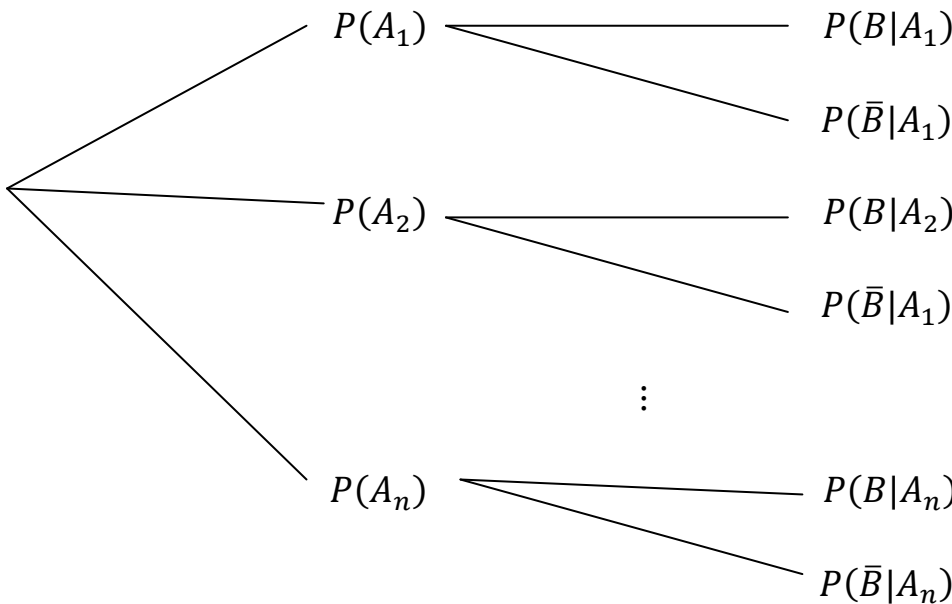
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$$

يسمى $P(B)$ بالإحتمال الكلي وأيضاً

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

وعادة نمثل الأحداث و احتمالاتها بالشجرة البيانية التالية:



مثال (24)

تنوي أسرة قضاء إجازة نهاية الأسبوع في أحد الأماكن السياحية A أو B أو C إذا كان احتمال وقوع المطر في A هو 0.6 وفي B هو 0.7 وفي C هو 0.5 . إذا إختارت الأسرة مكان الإجازة عشوائياً أحسبي

- (1) احتمال أن تقضي الأسرة إجازة ممطرة.
- (2) إذا علمتي أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فما هو احتمال أن إجازتها كانت في المكان A .
- (3) إذا علمتي أن الأسرة لم تقضي إجازة ممطرة , فما هو احتمال أن إجازتها كانت في المكان B .
- (4) إذا علمتي أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فما هو احتمال أن إجازتها كانت في المكان C .
- (5) إذا علمتي أن الأسرة قضت إجازة ممطرة , فما هو احتمال أن إجازتها كانت في المكان C أو B .

مثال (25)

صندوقان الأول به 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء , والصندوق الثاني به 8 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء. إختير أحد الصناديق عشوائياً واختيرت منه كرة . أوجدي

(1) إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.

(2) إذا إختيرت كرة ووجد أنها سوداء , ماهو إحتمال أن تكون من الصندوق الأول.

(3) إذا إختيرت كرة ووجد أنها بيضاء , ماهو إحتمال أن تكون من الصندوق الثاني.

الفصل الخامس

المتغيرات العشوائية

تعريف

المتغير العشوائي هو دالة ذات قيم عددية حقيقية معرفة على فراغ العينة S . أي أن المتغير العشوائي هو تطبيق مجاله فراغ العينة S ومجاله المقابل (أي القيم الممكنة) هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

مثال (1)

رميت قطعة عملة مرتين متتاليتين. اعتبري المتغير العشوائي هو عدد الصور الناتجة. أوجدي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

المتغير العشوائي المتقطع أو المنفصل

هو المتغير الذي تكون مجموعة قيمه الممكنة هي مجموعة متقطعة أي إذا كان مجاله المقابل قابل للعد (قيمه الممكنة قابلة للعد).

دالة الكتلة الاحتمالية (دالة التوزيع الاحتمالي)

إذا كان X متغير عشوائي متقطع ويأخذ القيم الممكنة القابلة للعد x_1, x_2, \dots فإن

$$f(X_i) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{if } x = x_i \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

تسمى دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X .

توضع القيم الممكنة للمتغير عشوائي ودالة الكتلة الاحتمالية في جدول كالتالي

x	x_1	x_2	-	-	-	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	-	-	-	$f(x_n)$

ونوضح بمثال كيفية حساب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي

مثال (2)

أوجد دالة الكتلة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائي X والذي يمثل عدد مرات ظهور الكتابة مطروحاً منه واحد عند رمي قطعة نقود 3 مرات ثم احسبي

$$f(-1), P(X \leq 0), P(X \leq 1), P(X > 1), P(X \leq 2), P(-1 \leq X < 2)$$

وارسمي دالة الكتلة الاحتمالية

تمرين واجب

تجربة عشوائية مكونة من إلقاء حجر نرد ثم سحب كرت عشوائياً من بين ثلاث كروت عليها الأرقام 1, 3, 5.

(1) مثلي فراغ العينة.

(2) إذا عرف المتغير العشوائي X على أنه الفرق المطلق بين عدد النقاط التي تظهر على حجر النرد والرقم الذي يظهر على الكرت.

$$X = |\text{الرقم على الكرت} - \text{عدد النقاط على النرد}|$$

(3) أوجد قيم الممكنة لـ X ودالة الكتلة الاحتمالية وارسمها ثم احسب

$$f(4), P(X = 2.5), P(X \leq 1), P(2 \leq X < 4), P(X > 3)$$

خصائص دالة الكتلة الاحتمالية

تحقق دالة الكتلة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائي X الخصائص التالية

1) $f(x) \geq 0 \forall x$

2) $\sum_{\text{all } x} f(x) = 1$

مثال (3)

أوجد قيمة الثابت C والتي تجعل هذه الدوال دوال كتلة احتمالية

1)

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	$5C$	$2C$	$3C$	$4C$

2) $f(x) = C(x + 1) \quad x = -1, 0, 1, 2, 3$

دالة التوزيع التراكمية

تعرف دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X على أنها

$$F(x) = P(X \leq x)$$

مثال (4)

احسبي دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ للمتغير العشوائي X والتي له دوال الكتلة الإحتمالية معطاة بالجدول التالية

1)

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2)

x	-1	0	1	2	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

خصائص دالة التوزيع التراكمي

- 1) $F(\infty) = 1$
- 2) $F(-\infty) = 0$
- 3) دالة التوزيع التراكمي متزايدة (غير متناقصة)
- 4) $0 \leq F(x) \leq 1$

التوقع للمتغير العشوائي

التوقع للمتغير العشوائي X (أو المتوسط) ويرمز له بالرمز $E(X)$ أو μ_X ويعرف كما يلي

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

حيث x القيم الممكنة للمتغير العشوائي $f(x)$ دالة الكتلة الإحتمالية.

مثال (5)

احسب التوقع للمتغير العشوائي X والتي دالة الكتلة الإحتمالية معطاة بالجدول

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

مثال (6)

أحسب التوقع للمتغير العشوائي X والتي دالة الكتلة الإحتمالية هي

$$f(x) = \frac{x^2}{30} \quad x = 1, 2, 3, 4$$

بعض خصائص التوقع

1) $E(C)=C$ حيث C عدد ثابت

2) $E(aX)= aE(X)$ حيث a عدد ثابت

$E(aX+C)= aE(X) + C$ من 1 و 2

3) $E(g(x)) = \sum_x g(x)f(x)$ حيث $g(x)$ دالة في x

بالرجوع إلى مثال (6) إحسبي التوقع لـ $2X-5$ وكذلك $E(-2X+3)$.

التباين للمتغير العشوائي

تباين المتغير العشوائي X يرمز له بالرمز $V(X)$ أو σ_X^2 ويعطى بالعلاقة

$$\sigma_X^2 = V(X) = E(X - \mu_X)^2$$

$$E(X) = \mu_X \text{ حيث}$$

بأخذ الجذر التربيعي للتباين محصل على الإنحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ_X .

لحساب التباين نستخدم

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

حيث $E(X^2)$ هو التوقع لـ X^2 ويعطى بالعلاقة

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$$

مثال (7)

احسبي التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X والتي دالة الكتلة الاحتمالية له

$$f(x) = \frac{x+1}{6}, \quad x = 0, 1, 2 \text{ هي}$$

بعض خصائص التباين

1) $V(C)=0$ لأي عدد ثابت C

2) $V(aX)=a^2V(X)$ حيث a عدد ثابت

$V(aX+C)= a^2V(X)$ من 1 و 2

بالرجوع إلى مثال (6) احسبي التباين لـ $2X-5$ وكذلك $V(-2X+3)$.

مثال (8)

بالرجوع إلى المثال السابق احسبي التباين $(3X-2)$ و $V(-6X+2)$.

مثال (9)

اعتبري للمتغير العشوائي X والذي له دالة الكتلة الإحتمالية $f(x)$ على النحو التالي

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	0.1	C	0.3	0.2	0.2

أوجدي قيمة C.

أوجدي $F(x)$.

احسبي الإحتمالات التالية

$$P(X \leq 5) =$$

$$P(X \leq -1) =$$

$$P(-1 \leq X \leq 2) =$$

$$P(X > 1) =$$

$$P(X = -3) =$$

$$P(X > 5) =$$

ثم احسبي التوقع والتباين والانحراف المعياري.

مثال (10)

إذا كان Y متغير عشوائي منفصل دالة كتلته الإحتمالية هي

$$f(y) = \frac{5 - y}{k} \quad y = 1, 2, 3, 4, 5$$

(1) أوجد قيمة الثابت k .

(2) أكتب جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير Y .

(3) أوجد دالة التوزيع التراكمي (التجميعي) للمتغير Y : $F(y)$.

(4) أحسب التوقع μ والتباين σ^2 للمتغير العشوائي Y .

الفصل السادس

أهم التوزيعات المتقطعة

(1) توزيع ذي الحدين

مقدمة

يعتبر توزيع ذي الحدين من أهم التوزيعات المتقطعة. ويستخدم هذا التوزيع في التجارب التي يمكن تصنيف جميع نتائجها إلى نتيجتين فقط. النتيجة التي نهمنا تسمى بالنجاح والأخرى بالفشل وكلمة النجاح تستعمل فقط لتسهيل وصف ظهور الحادثة.

تعريف

في التجارب المتكررة n من المرات المستقلة والتي تصنف نتائجها إلى صنفين: نجاح (الحدث الذي يهمنا) , أو الفشل (الحدث الآخر).

فإذا رمز لاحتمال وقوع النجاح بـ p والفشل بـ $q=1-p$ وكان المتغير العشوائي يمثل X عدد مرات النجاح فإن دالة الكتلة الإحتمالية تعطى بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ويقال أن X تتبع توزيع ذي الحدين . أما التوقع والتباين للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذي الحدين فيعطى بالعلاقات

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

ملاحظات

- (1) عندما $n=1$ فإن توزيع ذي الحدين يسمى توزيع برنولي.
- (2) معالم توزيع ذي الحدين n و p حيث n هي عدد المحاولات و p هو احتمال النجاح في المحاولة الواحدة.

مثال (1)

إذا كان احتمال فوز طالبة من كلية العلوم في المسابقة الثقافية هو 0.8 , إشتراك 5 طالبات في هذه المسابقة.

- (1) إكتبي دالة الكتلة الإحتمالية لعدد الطالبات الفائزات.
- (2) ما احتمال عدم فوز أي طالبة منهن.
- (3) ما احتمال فوز طالبتين منهن.
- (4) ما احتمال فوز طالبة على الأقل.
- (5) ما احتمال فوز طالبتين على الأكثر.
- (6) إحسبي التوقع والانحراف المعياري لعدد الطالبات الفائزات.
- (7) إحسبي التوقع والتباين لعدد الطالبات الغير فائزات.

مثال (2)

إذا كان 20% من إنتاج المصنع هو إنتاج تالف, أخذت عينة من 4 وحدات أوجدي الإحتمالات التالية

(1) الوحدات المختارة تالفة.

(2) على الأكثر توجد وحدتين تالفتين.

(3) 3 من الوحدات المختارة جيدة.

(4) التوقع والتباين لعدد الوحدات التالفة.

(5) التوقع والتباين لعدد الوحدات الجيدة.

مثال (3)

صندوق يتضمن ثمان تفاعات إثنان منها تالفة, سحبنا عشوائياً (مع الإعادة) ثلاث منها وكان المتغير العشوائي X يمثل التفاعات التالفة التي حصلنا عليها.

إكتبي دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير العشوائي X .

مثال (4)

إذا كان 7% من الأشخاص المسافرين عبر المحيط الأطلسي يصابون بدوار البحر, أخذت عينة من 5 أشخاص مسافرين عبر المحيط الأطلسي.

(1) إكتبي دالة الكتلة الإحتمالية لعدد الأشخاص في العينة الذين يصابون بدوار البحر.

(2) إحتمال أن يصاب ثلاثة منهم بدوار البحر هو

(0.003 0.045 0.309)

(3) إحتمال أن يصاب أربعة على الأكثر بدوار البحر هو

(0.042 0.472 0.999)

(4) إحتمال ن لا يصاب أربعة منهم بدوار البحر هو

(0.262 0.0001 0.999)

(5) التوقع لعدد الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر هو

(1.500 0.350 3.500)

(6) التباين لعدد الأشخاص الذين يصابون بدوار البحر هو

(1.05 1.625 0.326)

(2) توزيع فوق الهندسي

تعريف

يستخدم هذا التوزيع في حالة المجتمعات الصغيرة التي يكون حجمها محدود N ومقسمة إلى صنفين عدد وحدات الصفة الأولى a وعدد وحدات الصفة الثانية b ($a+b=N$) وسحبت عينة عشوائية حجمها n (المحاولات غير مستقلة) ويكون المتغير العشوائي X يمثل عدد وحدات العينة التي تحمل الصفة الأولى متغير له توزيع فوق هندسي وتكون دالة كتلته الإحتمالية على الصورة

$$f(x) = \frac{C_x^a C_{n-x}^b}{C_n^{a+b}} \quad X = 0,1,2, \dots, \min(a \text{ or } n)$$

معالم التوزيع هي (a, b, n) .

ويكون التوقع (المتوسط) لعدد الوحدات التي تحمل الصفة الأولى هو

$$E(X) = np \quad p = \frac{a}{N}$$

والتباين لعدد الوحدات التي تحمل الصفة الأولى هو

$$V(X) = npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \quad q = \frac{b}{N}$$

والإنحراف المعياري لعدد الوحدات التي تحمل الصفة الأولى

$$\sigma = \sqrt{npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right)}$$

مثال (5)

معرض للسيارات به 15 سيارة جديدة و 6 سيارات مستعملة, أخذت عينة عشوائية مكونة من 5 سيارات من هذا المعرض فإن

(1) دالة الكتلة الإحتمالية لعدد السيارات الجديدة في العينة هي

(2) إحتمال أن تحتوي العينة على 3 سيارات جديدة هو

(3) إحتمال أن تحتوي العينة على سيارة واحدة على الأكثر جديدة هو

(4) إحتمال أن تحتوي العينة على أربعة سيارات مستعملة هو

(5) متوسط عدد السيارات الجديدة في العينة هو

(6) التباين لعدد السيارات الجديدة في العينة هو

(7) متوسط عدد السيارات المستعملة في العينة هو

مثال (6)

في إحدى المسابقات الثقافية ترشح 10 علماء و 12 أديب من دول مختلفة, إذا إختير 7 مرشحين عشوائياً فإن

(1) دالة الكتلة الإحتمالية لعدد الأدباء في العينة هي

(2) إحتمال أن يشمل الإختيار 4 أدباء

(3) إحتمال أن يشمل الإختيار 5 علماء

(4) إحتمال أن يشمل الإختيار 6 أدباء على الأقل

(5) التوقع لعدد العلماء المختارون

(6) الإنحراف المعياري لعدد الأدباء المختارون

(3) توزيع بواسون

تعريف

هو توزيع لمتغير كمي منفصل يمثل عدد مرات حدوث حدث عشوائي في فترة زمنية محددة أو مكان محدد.

أمثلة:

عدد المرضى الذين يدخلون حجرة الإنتظار في عيادة خاصة خلال ساعة.

عدد حوادث المرور في أحد الميادين خلال اليوم.

عدد الحوادث الخطيرة التي تحدث في أحد المصانع خلال عام.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات حدوث حدث ما خلال فترة زمنية محددة أو مساحة مكانية محددة فإن المتغير X يكون له توزيع بواسون بمتوسط λ وتكون دالة كتلته الإحتمالية على الصورة

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

λ هي معلمة توزيع بواسون وهي أيضاً تمثل متوسط وتباين بواسون.

متوسط (التوقع) لعدد مرات حدوث الحدث = λ .

التباين لعدد مرات حدوث الحدث = λ .

الانحراف المعياري لعدد مرات حدوث الحدث = $\sqrt{\lambda}$.

مثال (7)

إذا كان X هو عدد الحالات الطارئة التي يستقبلها أحد المستشفيات خلال ليلة واحدة متغير عشوائي له توزيع بواسون (3) فإن

- (1) دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير العشوائي X تكون
- (2) إحتمال أن يستقبل المستشفى 4 حالات طارئة خلال ليلة واحدة هو
- (3) إحتمال أن يستقبل المستشفى أقل من حالتين طارئة خلال ليلة واحدة هو
- (4) إحتمال أن لا يستقبل المستشفى أي حالة طارئة خلال ليلة واحدة هو
- (5) متوسط عدد الحالات الطارئة التي يستقبلها المستشفى خلال ليلة واحدة
- (6) التباين لعدد الحالات الطارئة التي يستقبلها المستشفى خلال ليلة واحدة

مثال (8)

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الأشعات من نوع خاص التي يعملها أحد مراكز الأشعة خلال ساعة له توزيع بواسون (2.3) فإن

- (1) دالة الكتلة الإحتمالية للمتغير العشوائي X تكون
- (2) إحتمال أن يعمل المركز 3 اشعات من هذا النوع خلال ساعة هو
- (3) إحتمال أن يعمل المركز اشعتين على الأقل خلال ساعة هو
- (4) متوسط عدد الأشعات من النوع الخاص التي يعملها المركز خلال ساعة
- (5) الإنحراف المعياري لعدد الأشعات من النوع الخاص التي يعملها المركز خلال ساعة.

الفصل السابع

المتغير العشوائي المستمر (المتصل)

سبق لنا دراسة المتغير العشوائي المتقطع (أو المنفصل) وذكرنا أن المجال المقابل له يكون قابلاً للعد (منته أو غير منته). والمتغير العشوائي المتصل (المستمر) هو الذي يكون مجاله المقابل غير منته وغير قابل للعد ويكون عبارته عن جميع القيم داخل فترة (a,b).

دالة الكثافة الاحتمالية

لأي متغير عشوائي متصل توجد دالة تسمى دالة الكثافة الاحتمالية والتي تحقق الشروط التالية

- 1) $f(x) \geq 0 \quad \forall -\infty < x < \infty$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

دالة التوزيع التراكمي

إذا كان X متغير عشوائي متصل فإن الدالة المعطى بالعلاقة التالية

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

تسمى دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X .

التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

التوزيع الطبيعي

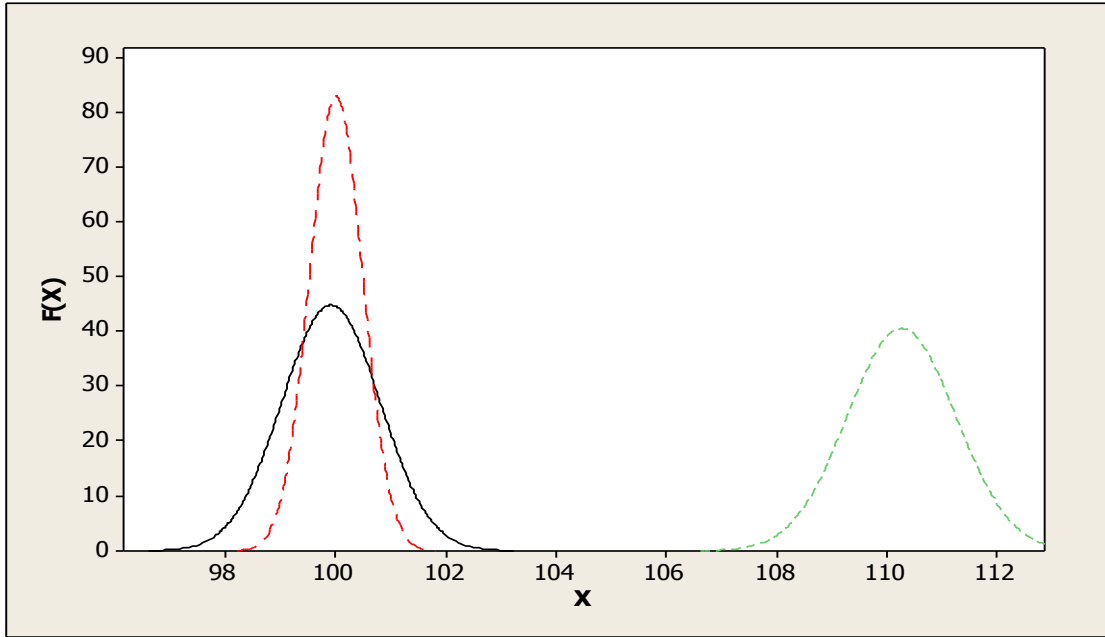
التوزيع الطبيعي هو عبارة عن توزيع له شكل الجرس وتأتي أهمية هذا التوزيع لكونه يقارب بشكل جيد توزيعات الكثير من القياسات المختلفة التي منها الأطوال والأوزان ودرجات الإمتحان. وتعطى دالة الكثافة للمتغير العشوائي X والذي يتبع التوزيع الطبيعي كالتالي

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

بعض خواص التوزيع الطبيعي

(1) قيم المتوسط μ والانحراف المعياري σ تعين المكان ودرجة التشتت الطبيعي

شكل (1)



شكل (1) يمثل أشكال التوزيع الطبيعي لقيم مختلفة للمتوسط والانحراف المعياري

(2) التوزيع الطبيعي متناظر حول المتوسط μ .

(3) منحنى التوزيع الطبيعي يقترب طرفاه أكثر فأكثر من المحور الأفقي ولكنه لا يمسه أو يقطعه أبداً.

(4) المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحداً صحيحاً.

(5) معالم التوزيع الطبيعي μ, σ^2

ونرمز للمتغير العشوائي الموزع توزيعاً طبيعياً بالرمز $X \sim N(\mu, \sigma)$ حيث μ هي متوسط للمتغير العشوائي X و σ هي الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X . وهكذا نقول أن X له توزيع طبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ .

التوزيع الطبيعي القياسي

كما ذكرنا سابقاً أن التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X يعتمد على متوسطه μ وانحرافه معياري σ , وهاتان القيمتان تؤثران على مكان التوزيع وعلى مقدار تشتته فلكل قيمة للمتوسط وكل قيمة للانحراف المعياري يتغير شكل ومكان التوزيع. ويوجد توزيع طبيعي واحد ثابت ومجدول يمكن تحويل جميع التوزيعات الطبيعية الأخرى إليه ويسمى بالتوزيع الطبيعي القياسي. وهو توزيع ذو متوسط صفر وانحراف معياري يساوي واحداً صحيحاً وعادة يرمز للمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بالرمز Z أي أن $Z \sim N(0,1)$ ودالة الكثافة الإحتمالية للمتغير العشوائي Z هي

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < \infty$$

دالة التوزيع التراكمي يرمز لها بالرمز $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

جميع القيم غير القياسية (أي تتبع أي توزيع طبيعي متوسطه μ وانحرافه معياري σ) يمكن تحويلها إلى قيم قياسية باستخدام العلاقة

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

مثال (1)

إذا علم أن أطوال مجموعة من الطلاب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط مقداره 155 سم وانحراف معياري 5 سم. أوجد القيم المعياريه (القياسيه) لأطوال الطلاب 150, 158 .

مثال (2)

باستخدام بيانات المثال السابق أوجد الأتوال الحقيقية للطلاب إذا علم أن أطوالهم القياسية هي :
-0.52, 0.82 .

** ولقد قام الإحصائيين بعمل جداول لحساب المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي في الفترة -3.4 إلى +3.4 .

مثال (3)

أوجد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي القياسي التي تقع

(1) بين $Z=0$ و $Z=0.87$.

(2) على يمين $Z=0.48$.

(3) على يسار $Z=0.79$.

(4) على يسار $Z=-3.59$.

مثال (4)

أحسبي

$$P(Z=1.9)=$$

$$P(Z\leq 1.72)=$$

$$P(Z<-0.54)=$$

$$P(Z>1.07)=$$

$$P(Z\geq 0.29)=$$

$$P(-1.91\leq Z \leq 0.45)=$$

مثال (5)

إذا كانت درجة الحرارة خلال فترة من العام في بلد ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 20 وانحراف معياري 3 . أوجد الاحتمالات التالية

- (1) أن تساوي درجة الحرارة 30° .
- (2) أن لا تزيد درجة الحرارة عن 23° .
- (3) أن تكون درجة الحرارة بين 15° و 26° .
- (4) أن لا تقل درجة الحرارة عن 20° .

مثال (6)

إن كانت أطوال 500 ورقة من أوراق نبات معين لها توزيع طبيعي بمتوسط 132 مليمترًا وانحراف معياري 10 مليمترًا . أوجد عدد الأوراق التالية:

- (1) ما بين 130 mm و 140 mm .
- (2) أكبر من 150 mm .
- (3) أقل من 130 mm .

مثال (7)

فترة الحمل التامة في الإنسان تعتبر متغير عشوائي بمتوسط 266 يوم وانحراف معياري 12 يوم. ماهي نسبة السيدات الاتي يستمر حملهن بين 260 و 270 يوم.

مثال (8)

إذا كان عدد الطلبة المتقدمين للالتحاق بإحدى الكليات العسكرية 2000 طالب وكانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 170 سم و انحراف معياري 10 سم.

- 1) مانسبة الطلبة المتقدمين الذين أطوالهم أكبر من 150 سم.
- 2) إذا كانت الكلية تقبل الطلاب الذين تتراوح أطوالهم بين 150 و 185 سم. فما هو عدد الطلبة المحتمل قبولهم.

مثال (9)

إذا كان Z متغير عشوائي له توزيع طبيعي قياسي أوجد الاحتمالات التالية

$$1) P(Z \leq -3.01) =$$

$$(0.0013 \quad 0.0000 \quad 0.3944)$$

$$2) P(Z > 4) =$$

$$(0.0013 \quad 0.0000 \quad 0.3944)$$

$$3) P(0 \leq Z \leq 1.25) =$$

$$(0.0013 \quad 0.0000 \quad 0.3944)$$

$$4) P(Z = 3.11) =$$

$$(0.0013 \quad 0.0000 \quad 0.3944)$$

تم بحمد الله»»

مع تمنياتنا لکن بالتوفيق والنجاح»»

نماذج

الإختبارات الفصلية والنهائية

