المحاكاة:

يعـد التحليـل باسـتخدام المحاكـاة مـن الادوات المهمـة التـي يمكـن توظيفهـا فـي صـياغة وحـل النمــاذج الرياضــية والاحصــائية ، حيــث أن هنالــك العديــد مــن المســائل و النمــاذج والتــي لايمكــن تمثيلهــا رياضــياً أمــا بســبب الطبيعــة العشــوائية للمســألة المدروســة أو بســبب تعقيــد صــياغتها أو وصـفها وصـفاً دقيقـاً. وفـي جميـع الحـالات التـي تستعـصي الـصياغة الرياضـية، تعـد المحاكـاة الأداة الوحيـدة التـي يمكـن اسـتخدامها للحصـول علـى إجابـات ويعتمـد اسـلوب المحاكـاة علـى فكـرة تقليـد تتمثـل بمحاكـاة النظـام قيـد الدراسـة وذلـك بإيجـاد صـورة طبـق الأصـل عـن هـذا النظـام مـن خـلال عمـل صـورة لأداء هــذا النظــام وللتفــاعلات التــي تجــري بــين عناصــره وذلــك دون المســاس بالنظــام نفســه. وتــتم عمليــة محاكــاة النظــام الحقيقــي بنظــام نظــري يمكــن التنبــؤ بســلوكه مــن خــلال توزيــع احتمــالي معــين ومــن ثــم يمكــن ســحب عينــة هــذا النظــام بواســطة مــا يــسمى بالإعــداد العــشوائية [Random numbers] ويمكــن القــول أن المحاكــاة هــو عبــارة عــن تجربــة يمكــن أن تجــرى بواســطة الحاســوب وتشـمل علـى اسـتخدام الأرقـام العشـوائية والـرقم العشـوائي هـو سلسـلة مـن الأرقـام المتعاقبـة المسـتقلة إحصـائيا والتــي لهــا توزيــع منــتظم ضــمن الفتــرة [0 ، 1] أن بنــاء النمــاذج باســتخدام المحاكــاة لــه عدة مميزات يمكن توضيحها بما يأتي

1-أجراء التجربة بوقت قصير .

2-قلة الادوات التحليلية المطلوبة.

3-سهولة توضيح وشرح النماذج.

لغة البرمجةMATLAB: The MATLAB Programming Language

يعتبر برنـامج MATLAB البرنـامج الأشـهر فـي الأوسـاط العلميـة إذ يسـتخدم هـذا البرنـامج في معظم المسائل العلميـة والهندسية فبعد نمذجـة أي مسألة أو ظـاهرة يـأتي بعدها دور هـذا البرنـامج ليتعامل مـع تلك البرامج ويحللها بأبسط الطرق وأحدثها وأيسرها. وتعتبر لغة MATLAB لغة برمجيـة عاليـة الأداء تستخدم لإجراء الحسابات التقنيـة ,وتقوم بعمليات الحساب والاظهار ضمن بيئـة سهلة البرمجـة كما أنهـا لا تحتـاج إلـى احتراف كبير .تمكنك هاذه اللغة من حل العديد من المسائل التقنيـة حسابيا خاصـة التـي يعبر عنهـا بالمصفوفات والتـي تحتـاج إلـى جهد كبير لبرمجتهـا بلغة البرمجـة الأخرى مثل لغة C و. FORTAN أتت تسمية هذه اللغة من اختصار التعبير (Matrix Laboratoryمختبر المصفوفة)حيث إن البرنـامج مصمم أساسا للتعامل مـع العمليات علـى المصفوفات بشكل بسيط .كما أرفقت بهذه اللغة أدوات لمعالجـة وحل تطبيقات علميـة خاصـة سمية (toolboxes وهي أكثر من عشرين أداة) وتعتبر هذه الأدوات هامـة جداً لمستخدمي هذه اللغة ,حيث تسمح لهم بتعلم وتطبيق تقنيات حل متخصصة لمعالجة مشكلات ومسائل خاصـة ,مثل معالجـة الإشـارة ونظم الـتحكم والمحاكـاة والشبكات العصـبية والتحليل الكمـي والمـالي والإحصـاء ومسـائل الجبـر الخطـي والأمثلـة ... الـخ. يـؤمن برنـامج MATLAB أدوات واجهـات التخاطـب

الرسومية Graphical User Interface (GUI) التي تجعلك تتعامل مع البرنامج على انه أداة تطبيقية متطورة.

توليد الاعداد العشوائية

ان العدد العشوائي هو متتالية اعداد لها الخاصية العشوائية والتي تعني عدم امكانية التنبؤ باي عنصر انطلاق من العناصر التي سبقته. أي ان هذه اطلاعداد طلايمكبن ان تكون متوالية او ان تتبع نمط منظم او متكرر.

طرائق توليد الاعداد العشوائية

1:طريقة تربيع الاوساط

تتلخص فكرة هذه الطريقة بالاتي

1- اختيار العدد البذري وليكن x_0. والذي هو عبارة عن عدد صحيح مؤلف من n من الاعداد العشوائية

2- احسب مربع هذا العدد

3- احقطلع 25% من طرفي العدد الناتج

4- يكون المقدار الاوسط هو العدد العشوائي الجديد وليكبن x_1

وبالامكان تكرار الطريقة للحصول على متتالبية من الاعداد العشوائية ومن خواص هذه الطريقة انها بطيئة التوليد لكثرة العمليات الحسابية المرافقة لعمليات التوليد كما انها تضمحل بسرعة عندما يكبون العدد المولد صفر يضاف الى ذلك انها ذات دورة قصيرة.

2: طريقة المضروب الاوساط

ان هذه اطريقة مطبقة لطريقة تربيع الاوساط باختلاف واحد هو ان العدد المولد الجديد نحصل عليه من الصيغة الاتية:

$$x^* = kx_{i-1}\,;\, i = 1, 2 \ldots$$

ان ان العدد k عدد صحيح موجب ومن خصائص هذه الطريقة انها تتوزع بانتظام اكثر من سابقتها ولها دورة اطول وهي تميل الى الاضمحلال ايظلا

توليد المتغيرات العشوائية

هنالك اكثر من طريقة يمكن استخدامها للحصول على متغيرات عشوائية . وغالبا ما تعتمد هذه الطرق خوارزميات تعتمد على الصيغة الرياضية لدالة التوزيع ومن اهم طرق الحصول على متغيرات عشوائية هي طريقة التجويل المعكوس .

طريقة التحيل المعكوس.

واحدة من اهم طرق الحصول على متغيرات عشوائية لتوزيعات احتمالية مستمرة ومتقطعة كما تعتبر هذه الطريقة من ابسط طرق محاكات التوزيعات الاحتمالية حيث تعتمد الخوارزمية لطريقة تحويل المعكوس على دالة التوزيع.

طريقة التحويل المعكوس للتوزيعات المستمرة.

يكن الحصول على متغيرات عشوائية لـ اي توزيع احتمالي مستمر اذا كانت دالة التوزيع لهذا المتغير هي ((F(x)) هي دالة عشوائية مستمرة و متزايدة بشكل مضطرد (Strictly Increasing) أي ان

If $x_1 < x_2$ and $0 < F(x_1) < F(x_2) < 1$ $than$ $F(x_1) < F(x_2)$

فاذا رمزنا لمعكوس الدالة $F(x)$ بـ $F^{-1}(x)$ فان الخوارزمية للحصول على متغيرات عشوائية مستمرة باستخدام طريقة التحويل المعكوس هي.

1-Generate $u \sim u(0,1)$

2-Return x=$F^{-1}(u)$

وبما ان $1 \leq u \leq 0$ وان المدى (Range) للدالة $F(x)$ هو $[0.1]$ تكون الدالة $F^{-1}(u)$: هي دالة معرفة دائما ولتوضيح ان المتغير العشوائي x والتي تم الحصول عليها من تطبيق خوارزمية التحويل المعكوس لها التوزيع الاحتمالي F ولأي عدد حقيقي يكون

$$pr(X \leq x) = F(x)$$

وللثبات العلاقة اعلاه

$$pr(X \leq x) = pr(F^{-1}(u) \leq x)$$
$$pr(F^{-1}(u) \leq x) = pr(u \leq F(x))$$
$$pr\big(u \leq F(x)\big) = F(x)$$

اي ان المتغير العشوائي الذي يتم الحصول من طريقة التحويل المعكوس هو متغير عوائي يتبع التوزيع الاحتمالي F

طريقة التوزيع المعكوس للتوزيعات المتقطعة

لا يقتصر تطبيق طريقة التحويل المعكوس على توليد متغيرات عشوائية لتوزيعات مستمرة بل يمكن استعمالها لإيجاد متغيرات عشوائية لتوزيعات غير مستمرة فاذا كان X هو متغير عشوائي متقطع ان دالة التوزيع في هذه الحالة هي.

$$F(x) = pr(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

$p(x_i)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المتقطع (Probability Mass Function) ولتوليد متغيرات عشوائية $(x_1; x_2 \ldots)$ تتبع توزيع احتمالي متقطع بحيث ان $(x_1 < x_2 \ldots)$ باستعمال طريقة التحويل المعكوس يتم من خلال الاتي.

1−Generate $u \sim u(0,1)$

2−Detemine the smallest Positive integer I such that $u \leq F(x)$ and return $x_i = x$

وللتحقق من ان طريقة التحويل المعكوس يمكن تطبيقها مع المتغيرات العشوائية غير المستمرة يجب اثبات المعادلة

$$pr(X = x_i) = p(x_i) \ \forall i$$

ان المعادلة اعلاه يمكن اثباته كالاتي:

First: When $(i = 1)$ *we get* $X = x_1$ *if and only if* $u \leq F(x_1) = p(x_1)$

Since we have arranged the x's in increasing order. Since $(u \sim u(0,1))$

$pr(X = x_1) = p(x_1)$ *as desired*

Second: when $(i \geq 2)$ *the algorithm set* $X = x_i$ *if and only if*

$F(x_{i-1}) < u \leq F(x_i)$ *Since the I chosen by the algorithm is the smallest positive integer such that* $u \leq F(x_i)$ *further since* $(u \sim u(0,1))$ *and* $0 \leq F(x_{i-1}) < F(x_i) \leq 1$

$pr(X = x_i) = pr[F(x_{i-1}) < u \leq F(x_i)] = F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(x_i)$

Uniform $u(\alpha; \beta)$

1−Density distribution function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 \quad x < \alpha \ or \ x > \beta & \end{cases}$$

2−Distribution function

$$F(x) = \begin{cases} 0 & for \ x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & for \ x \in [\alpha; \beta) \\ 1 & for \ x \geq \beta \end{cases}$$

3−Algrthom

a) Generate $u \sim u(0;1)$
b) Return $x = \alpha + (\beta - \alpha)u$

```
clc,clear all,close all
alpha=input('alpha=');Beta=input('Beta=');n=input('n=');k=input('k=');
if Beta>alpha
    for j=1:k
    for i=1:n
u=rand;
x(i,j)=alpha+(Beta-alpha)*u;
    end
    end
x
else
   disp ('Eror')
end
```

Exponential Distribution

1−Density distribution function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2−Distribution function

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

3−Algrthom

a) **Generate** $u \sim u(0;1)$

b) **Return** $x = -\beta ln(u)$

```
clc,clear all,close all
Beta=input('Beta=');n=input('n=');k=input('k=');
    for j=1:k
    for i=1:n
u=rand;
x(i,j)=-Beta * log(u);
    end
    end
x
```

Bernoulli distribution

1-Mass distribution function

$$f(x)=\begin{cases}1-p & if\ \ x=0\\ p & if\ \ x=1\\ 0 & otheprwise\end{cases}$$

2-Distribution function

$$F(x)=\begin{cases}0 & if\ \ \ x\le 0\\ 1-p & if\ \ 0\le x<1\\ 1 & if\ \ \ x\ge 1\end{cases}$$

3-Algrthom

a) Generate $u \sim u(0;1)$

b) If $u\le p$ return x=1 otherwise return x=0

```
clc,clear all,close all
p=input('p=');k=input('k=');
for h=1:k
    u=rand;
 if u<=p
     y=1;
 else
     y=0;
 end
  x(h)=y
end

x
```

Binomial Distribution

1-Mass distribution function

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} & if\ \ x=0,1,\dots,n\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

2-Distribution function

$$F(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x \leq 0 \\ \sum_{i=0}^{|x|} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} & if \;\; 0 \leq x < n \\ 1 & if \quad n < x \end{cases}$$

3−Algrthom

To generate a $bin(x, n)$ .we have the sum of n iid Bernoulli(p) random variables has the $bin(x, n)$

a) **Generate $y_1; y_2; \dots y_n$ $as\ iid\ Bernoulli(p)$**
b) **return $x = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$**

```
clc,clear all,close all
p=input('p=');n=input('n=');k=input('k=');
for h=1:k
  for j=1:n
         x=0;
  for l=1:n
u=rand;
 if u<=p
     y=1;
 else
     y=0;
 end
  x=x+y;
  end
   z(j,h)=x;
  end
end
  z
```