

الرياضيات التطبيقية

المقرر ر 337

اعداد

أ.د. حسام لوتي سعد

جامعة البصرة / كلية العلوم

قسم الرياضيات

الفصل الأول

دالة كاما

1.1 دالة كاما

تعريف 1.1. تعرف دالة كاما كالآتي

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0. \quad (1.1)$$

التكامل في (3.1) متقارب عندما $n > 0$.

1.2 خصائص دالة كاما

مثال 1.1.

$$\Gamma(1) = 1.$$

الحل:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1.$$

مثال 1.2.

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n). \quad (1.2)$$

الحل:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^{n+1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

نفرض

$$\begin{aligned} u &= x^n & \Rightarrow & du = nx^{n-1} dx \\ dv &= e^{-x} dx & \Rightarrow & v = -e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= -x^n e^{-x} \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -(\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} - 0) + n\Gamma(n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \\ &\vdots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= -(0 - 0) + n\Gamma(n) \\ &= n\Gamma(n). \end{aligned}$$

مثال 1.3. اذا كانت n عدد صحيح غير سالب فإن

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (1.3)$$

الحل:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n \cdot (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1) \cdot (n-2)\Gamma(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots 1 \cdot \Gamma(1) \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots 1 \\ &= n!. \end{aligned}$$

أي ان العلاقة (1.3) تعرف قيم دالة كاما للاعداد الصحيحة الموجبة والصفر

$$\Gamma(5) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

الآن سنعرف دالة كاما لقيم n السالبة. من المعادلة (1.2)

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}. \quad (1.4)$$

إذا كان $-1 < n < 0 \Leftrightarrow 0 < n+1 < 1$ يمكن حساب قيمة دالة كاما عندما $-1 < n < 0$
إذا كان $-2 < n < -1 \Leftrightarrow -1 < n+1 < 0$ يمكن حساب قيمة دالة كاما عندما $-2 < n < -1$
إذا كان $-3 < n < -2 \Leftrightarrow -2 < n+1 < -1$ يمكن حساب قيمة دالة كاما عندما $-3 < n < -2$
نستمر بنفس الطريقة أعلاه لحساب دالة كاما في كل الفترات المفتوحة السالبة.
بتكرار استخدام المعادلة (1.4) نحصل على

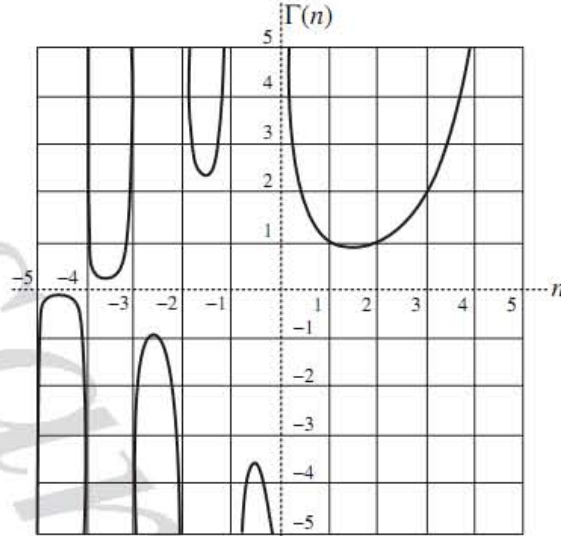
مثال 1.4.

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+k)}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}. \quad (1.5)$$

الحل:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \frac{\Gamma(n+1)}{n} \\ &= \frac{\Gamma(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \frac{\Gamma(n+3)}{n(n+1)(n+2)} \\ &\vdots \\ &= \frac{\Gamma(n+k)}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}. \end{aligned}$$

العلاقة (1.5) تعطينا قيمة دالة كاما عندما n عدد سالب لا يساوي صفر أو عدد صحيح ($n \neq 0, -1, -2, \dots$)



نلاحظ عندما تقترب n من الصفر أو عدد صحيح سالب فإن $\Gamma(n) \rightarrow \mp \infty$

مثال 1.5. أثبت أن

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

الحل:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{1/2-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx. \end{aligned}$$

نفرض

$$\begin{aligned} x &= y^2 &\Rightarrow & dx = 2y dy \\ x &= 0 &\Rightarrow & y = 0 \\ x &= \infty &\Rightarrow & y = \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} (y^2)^{-1/2} e^{-y^2} 2y dy \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy. \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \left(2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right) \left(2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy\right) \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= -\frac{4}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} d\theta \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} (0 - 1) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= 2\theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

لايجاد قيمة $\Gamma(n)$ عندما تكون n انصاف الاعداد الصحيحة الموجبة نستخدم العلاقة (1.2).

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

لايجاد قيمة $\Gamma(n)$ عندما تكون n انصاف الاعداد الصحيحة السالبة نستخدم العلاقة (1.5)

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = ?$$

$$-1 < -1/2 \Rightarrow 0 < -1/2 + 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = ?$$

$$-2 < -3/2 \Rightarrow 0 < -3/2 + 2 \Rightarrow k = 2$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2} + 2\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = ?$$

$$-3 < -5/2 \Rightarrow 0 < -5/2 + 3 \Rightarrow k = 3$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2} + 3\right)}{\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{15}{8}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{15}{8}} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.$$

ملاحظة: 1.1. عندما نستمر بنفس الطريقة أعلاه نلاحظ انه في حالة $n = -p - 1/2$ حيث p عدد صحيح موجب او صفر نحصل على العلاقة التالية

مثال 1.6. أثبت أن

$$\Gamma\left(-p - \frac{1}{2}\right) = (-1)^{p+1} \frac{2^{p+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p+1)} \sqrt{\pi}.$$

الحل:

$$-p - 1 < -p - 1/2 \Rightarrow 0 < -p - 1/2 + p + 1 \Rightarrow k = p + 1$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-p - \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-p - \frac{1}{2} + p + 1\right)}{\left(-p - \frac{1}{2}\right)\left(-p + \frac{1}{2}\right)\left(-p + \frac{3}{2}\right) \cdots \left(-p - \frac{1}{2} + p + 1 - 1\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^{p+1} \left(p + \frac{1}{2}\right)\left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^{p+1} \frac{(2p+1)}{2} \frac{(2p-1)}{2} \frac{(2p-3)}{2} \cdots \frac{1}{2}} \\ &= (-1)^{p+1} \frac{2^{p+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p+1)} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = ?$$

$$-5/2 = -p - 1/2 \Rightarrow p = 2.$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{(-1)^{3} 2^3}{1 \cdot 3 \cdot 5} \sqrt{\pi} = -\frac{8}{15} \sqrt{\pi}.$$

1.3 أمثلة

مثال 1.7. جد قيمة

$$\int_0^{\infty} t^4 e^{-2t} dt$$

الحل: نفرض

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2}$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$t = \infty \Rightarrow x = \infty$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{32} \int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx.$$

نقارن الناتج مع تعريف دالة كاما

$$n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

$$\int_0^{\infty} t^4 e^{-2t} dt = \frac{1}{32} \Gamma(5) = \frac{4!}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} t^4 e^{-2t} dt = \frac{3}{4}$$

مثال 1.8. أثبت أن

$$\int_0^1 x^m (\ln(x))^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad m > -1.$$

الحل: نفرض

$$y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -\infty$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (\ln(x))^n dx &= \int_{-\infty}^0 e^{my} y^n e^y dy \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(m+1)y} y^n dy. \end{aligned}$$

$$m > -1 \Rightarrow m + 1 > 0$$

نفرض

$$\begin{aligned} (m+1)y &= -z &\Rightarrow y &= -\frac{z}{m+1} &\Rightarrow dy &= -\frac{dz}{m+1} \\ y &= -\infty &\Rightarrow z &= \infty \\ y &= 0 &\Rightarrow z &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{(m+1)y} y^n dy &= \int_{\infty}^0 \frac{(-1)^n z^n e^{-z}}{(m+1)^n} (-1) \frac{dz}{m+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} z^n e^{-z} dz \\ &= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

مثال 1.9. جد قيمة

$$\int_0^{\pi/2} (\tan^3(\theta) + \tan^5(\theta)) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta$$

الحل:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} (\tan^3(\theta) + \tan^5(\theta)) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tan^3(\theta) (1 + \tan^2(\theta)) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tan^2(\theta) \tan(\theta) (1 + \tan^2(\theta)) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tan^2(\theta) \tan(\theta) \sec^2(\theta) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

نفرض

$$\begin{aligned} x &= \tan^2(\theta) \Rightarrow dx = 2 \tan(\theta) \sec^2(\theta) d\theta \Rightarrow \frac{dx}{2} = \tan(\theta) \sec^2(\theta) d\theta. \\ \theta &= 0 \Rightarrow x = 0 \\ \theta &= \pi/2 \Rightarrow x = \infty. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} (\tan^3(\theta) + \tan^5(\theta)) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta = \int_0^{\infty} x e^{-x} \frac{dx}{2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(2) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$