تمارين في التفاضل والتكامل

المقرر ر102

اعداد

أ.د. حسام لوتي سعد

جامعة البصرة / كلية العلوم

قسم الرياضيات

تمارين في المقرر ر ١٠٢

ا. د. حسام لوتي سعد
جامعة البصـــرة ،كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

١ـ ناقش وارسم القطوع المخروطية التالية.

(ا) $9y^2 + 25x^2 + 18y - 100x - 116 = 0$.

(ب) $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$.

(ت) $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$.

(ث) $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$.

(ج) $9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0$.

(ح) $y^2 - x^2 - 4y + 8x - 21 = 0$.

٢ـ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات التالية.

(ا) $y = 4 - x^2$ ، $y = -x + 2$ ، $x = -2$ ، $x = 3$. ج : 10

(ب) $y = 2 - x^2$ ، $y = -x$. ج : $\frac{9}{2}$

(ت) $y = -x^2 - 2x$ ، $y = x^2 - 4$ ، $x = -3$ ، $x = 1$. ج : $\frac{38}{3}$

(ث) $y = x$ ، $y = \frac{1}{x^2}$ ، $x = 2$ ، المحور x . ج : 1

(ج) $y = |\sin(x)|$ ، $y = 1$ ، $x = -\frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{\pi}{2}$. ج : $\pi - 2$

(ح) $y = x^2 - 2$ ، $y = 6 - x^2$. ج : $\frac{64}{3}$

Husam L. Saad

(خ) $y^2-6y+2x+5=0$ ، $x=0$. ج : $\frac{25}{3}$

(د) $y=x^2-4x+2$ ، $x+y-6=0$. ج : $\frac{125}{6}$

(ذ) $y^2=x+1$ ، $y^2=7-x$. ج : $\frac{64}{3}$

(ر) $x=4y-y^2$ ، $x+y=4$. ج : $\frac{9}{2}$

(ز) $x=-y^2+2y+2$ ، $x=y^2-2y+2$. ج : $\frac{8}{3}$

(س)

(ش) $y=|x^2-4|$ ، $y=\frac{x^2}{2}+4$. ج : $\frac{64}{3}$

(ص) $y=-x^2+4x$ ، $y=x^2$. ج : $\frac{8}{3}$

٣- جد مساحة الجزء المشترك بين الدائرتين $x^2+y^2=9$ ، $x^2+y^2=6x$. ج : $6\pi-\frac{9}{2}\sqrt{3}$

٤- جد مساحة الجزء المشترك بين الدائرتين $x^2+y^2=4$ ، $x^2+y^2=4y$. ج : $\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

٥- جد حجم الجسم المتولد من دوران المساحة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات التالية حول المحور المبين في كل منها.

(ا) $y=\sqrt{x}$ ، $x=4$ ، المحورx : حول المحور x . ج : 8π

(ب) $y=\sqrt{x}$ ، $x=4$ ، $y=1$: حول المستقيم $y=1$. ج : $\frac{9}{2}\pi$

(ت) $x=\frac{2}{y}$ ، $y=1$ ، $y=4$ ، $x=0$: حول المحور y . ج : 3π

(ث) $x=y^2+1$ ، $x=3$: حول المستقيم $x=3$. ج : $\frac{64}{15}\sqrt{2}\ \pi$

(ج) $y=x^2+1$ ، $y=-x+3$: حول المحور x . ج : $\frac{117}{5}\pi$

(ح) $y=\sqrt{9-x^2}$ ، $y=0$: حول المحور x . ج : 36π

(خ) $x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$ ، $x=1$ ، $y=0$: حول المستقيم $x=1$. ج : $\frac{2}{3}\pi$

(د) $y=\sqrt{x}$ ، $x=0$ ، $y=2$: حول المستقيم $x=4$. ج : $\frac{224}{15}\pi$

(ذ) $x=y^2+1$ ، $x=3$: حول المستقيم $x=4$. ج : $\frac{48}{5}\sqrt{2}\pi$

(ر) $y=x^2$ ، $y=4x-x^2$: حول المستقيم (١) $y=-1$ (٢) $x=3$.

ج : (١) 16π (٢) $\frac{32}{3}\pi$

(ز) $y=x^2+1$ ، $y=-x+3$: حول المستقيم $y=-1$. ج : $\frac{162}{5}\pi$

٦- جد اطوال اقواس المنحنيات التالية.

(ا) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln(x)$ ، من $x=1$ الى $x=2$. ج : $\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\ln(2))$

(ب) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ، من $x=0$ الى $x=2$. ج : $\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})$

(ت) $y=\sqrt{36-x^2}$ ، من $x=0$ الى $x=3$. ج : π

(ث) $x=\ln(\frac{y^2-1}{2})$ ، من $y=2$ الى $y=5$. ج : $3+\ln(2)$

(ج) $x=\ln(\frac{e^y+1}{e^y-1})$ ، من $y=a$ الى $y=b$. ج : $\ln\left(\left|\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}\right|\right)$

(ح) $y=t^3+1$ ، $x=2t^{9/2}-4$ ، من $t=1$ الى $t=3$. ج : $\frac{4}{27}\left(244\sqrt{61}-5\sqrt{10}\right)$

(خ) $x=\ln(\sin(y))$ ، من $y=\frac{\pi}{6}$ الى $y=\frac{\pi}{4}$. ج : $\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}\right)$

(د) $x=a\cos^3(\theta)$ ، $y=a\sin^3(\theta)$ ، من $\theta=0$ الى $\theta=\frac{\pi}{2}$. ج : $\frac{3}{2}a$

(ذ) $x=\frac{a}{2}(e^{\frac{y}{a}}+e^{-\frac{y}{a}})$ ، من $y=0$ الى $y=a$. ج : $\frac{a}{2}(e^1-e^{-1})$

(ر) $x=\cos(t)$ ، $y=t+\sin(t)$ ، $0\leqslant t\leqslant\pi$. ج : 4

(ز) $x=a(\theta-\sin(\theta))$ ، $y=a(1-\cos(\theta))$ ، من $\theta=0$ الى $\theta=2\pi$. ج : $8a$

(ع) $x=8(\cos(t)+t\sin(t))$ ، $y=8(\sin(t)-t\cos(t))$ ، $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. ج : π^2

(غ) $x=\frac{y^3}{3}+\frac{1}{4y}$ ، من $y=1$ الى $y=3$. ج : $\frac{53}{6}$

(ف) $y=\frac{3}{4}x^{4/3}-\frac{3}{8}x^{2/3}+5$ ، $1\leqslant x\leqslant 8$. ج : $\frac{99}{8}$

(ق) $x=\int_0^y\sqrt{\sec^4(t)-1}dt$ ، $-\frac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}$. ج : 2

(ك) $y=\int_0^x\tan(t)dt$ ، $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$. ج : $\frac{1}{2}\ln(3)$

٧- اثبت ان طول قوس المنحني $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هو $4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2(\theta)}d\theta$ ، حيث ان e هو الاختلاف المركزي .

٨- جد مساحة السطح المتولد من دوران قوس من كل منحني من المنحنيات التالية حول المحور المبين في كل منها.

(ا) $y=\sqrt{a^2-x^2}$ من $x=-\frac{a}{2}$ الى $x=\frac{a}{2}$: المحور x . ج : $2\pi a^2$

(ب) $y=\ln(x)$ من $x=0$ الى $x=1$: المحور y . ج : $\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$

(ت) $y=\sin(x)$ من $x=0$ الى $x=\pi$: المحور x . ج : $\pi(2\sqrt{2}+\ln\left(\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|\right)$

(ث) $x=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})$ من $y=0$ الى $y=1$: المحور y . ج : $\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}e^2+2-\frac{1}{2}e^{-2})$

(ج) $x=\frac{1}{3}(y^2+2)^{3/2}$ من $y=0$ الى $y=3$: المحور x . ج : $\frac{99}{2}\pi$

(ح) $x=a\cos(\theta)$ ، $y=a\sin(\theta)$ من $\theta=0$ الى $\theta=\frac{\pi}{2}$: المحور y . ج : $2\pi a^2$

(خ) $x=t^3$ ، $y=\frac{3}{2}t^2$ من $t=1$ الى $t=3$: المحور x . ج : $(150\sqrt{10}-\frac{6}{5}\sqrt{2})\pi$

(د) $x=\sin^3(\theta)$ ، $y=\cos^3(\theta)$ من $\theta=0$ الى $\theta=\frac{\pi}{2}$: المحور y . ج : $\frac{6}{5}\pi$

(ط) $x^2+y^2=a^2$: المحور x . ج : $4\pi a^2$

(ظ) $y=\sqrt{2x-x^2}$ ، $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$: المحور x . ج : 2π

(ع) $x=\frac{y^4}{4}+\frac{1}{8y^2}$ ، $1\leqslant y\leqslant 2$: المحور x . ج : $\frac{253}{20}\pi$

(غ) $x=8(\cos(\theta)+\theta\sin(\theta))$ ، $y=8(\sin(\theta)-\theta\cos(\theta))$ من $\theta=0$ الى $\theta=\frac{\pi}{2}$: المحور y .
ج : $128\pi\left(\frac{3}{2}\pi-3\right)$

٩- جد جميع نقاط التقاطع للمنحنيات القطبية التالية.

(ا) $r=2(1-\cos(\theta))$ ، $r=-4\cos(\theta)$.

(ب) $r=4\sin(\theta)$ ، $r=4\sin(2\theta)$.

(ت) $r=1-\cos(\theta)$ ، $r=4\cos(\theta)$.

(ث) $r=2(1+\cos(\theta))$ ، $r=2(1-\sin(\theta))$.

(ج) $r=1+\sin(\theta)$ ، $r=1-\sin(\theta)$.

(ح) $r=\sqrt{2}$ ، $r^2=4\sin(\theta)$.

(خ) $r^2=\sqrt{2}\sin(\theta)$ ، $r^2=\sqrt{2}\cos(\theta)$.

(د) $r=1$ ، $r^2=2\sin(2\theta)$.

-١٠

(ا) جد مساحة المنطقة الواقعة خارج $r=2-2\cos(\theta)$ وداخل $r=4$. ج : 10π

(ب) جد مساحة المنطقة الواقعة خارج $r=1$ وداخل $r=-2\cos(\theta)$. ج : $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ت) جد مساحة المنطقة الواقعة خارج $r=2+2\cos(\theta)$ وداخل $r=3$. ج : $2\pi+\frac{9}{2}\sqrt{3}$

(ث) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل $r=4\cos(2\theta)$ وخارج $r=2\sqrt{2}$. ج : 8

(ج) جد مساحة المنطقة الواقعة خارج $r=\sqrt{2}$ وداخل $r^2=4\cos(2\theta)$. ج : $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

(ح) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل $r=6\sin(\theta)$ وخارج $r=3$. ج : $3\pi+\frac{9}{2}\sqrt{3}$

(خ) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل $r = 3\cos(\theta)$ وخارج المنحني $r = 1 + \cos(\theta)$. ج : π

(د) جد مساحة المنطقة المشتركة بين

(١) $r = 4\cos(\theta)$ ، $r = 4\sin(\theta)$. ج : $2\pi - 4$

(٢) $r = 2(1 + \sin(\theta))$ ، $r = 2(1 - \sin(\theta))$. ج : $6\pi - 16$

(٣) $r = 2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ ، $r = 3\cos(\theta)$. ج : $\frac{5}{4}\ \pi$

(٤) $r = 4\sin(\theta)$ ، $r = 2$. ج : $2\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

(ذ) جد مساحة المنطقة المشتركة الواقعة في الربع الاول والرابع للّمنحنيين

$r = 2(1 + \cos(\theta))$ ، $r = 2(1 - \sin(\theta))$. ج : $3\pi - 4\sqrt{2} + 3$

(ر)

(١) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل $r = 5\cos(\theta)$ وخارج $r = 2 + \cos(\theta)$.

ج : $\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}$

(٢) جد مساحة المنطقة الواقعة خارج $r = 5\cos(\theta)$ وداخل $r = 2 + \cos(\theta)$.

ج : $\frac{11}{12}\pi + \sqrt{3}$

(٣) جد مساحة المنطقة المشتركة بين $r = 5\cos(\theta)$ ، $r = 2 + \cos(\theta)$. ج : $\frac{43}{12}\pi - \sqrt{3}$

(ز)

(١) جد مساحة المنطقة الواقعة داخل $r = 3\sin(\theta)$ وخارج $r = 1 + \sin(\theta)$. ج : π

(٢) جد مساحة المنطقة الواقعة خارج $r = 3\sin(\theta)$ وداخل $r = 1 + \sin(\theta)$. ج : $\frac{\pi}{4}$

(٣) جد مساحة المنطقة المشتركة بين $r = 3\sin(\theta)$ ، $r = 1 + \sin(\theta)$. ج : $\frac{5}{4}\pi$

١١ - جد اطوال اقواس المنحنيات القطبية التالية من $\theta = \theta_1$ الى $\theta = \theta_2$.

(أ) $r = \frac{2}{1 + \cos(\theta)}$ ، من $\theta = 0$ الى $\theta = \frac{\pi}{2}$. ج : $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$

(ب) $r\theta = 1$ ، من $\theta = 0$ الى $\theta = \frac{\pi}{2}$. ج :

(ت) $r = \theta\sin(\theta)$ ، من $\theta = \frac{1}{2}$ الى $\theta = 1$. ج :

(ث) النصف العلوي من المنحني $r = a(1 + \cos(\theta))$. ج : $4a$

(ج) $r = \cos^3(\frac{\theta}{3})$ ، من $\theta = 0$ الى $\theta = \frac{\pi}{4}$. ج : $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}$

(ح) $r = \sqrt{1 + \sin(2\theta)}$ ، من $\theta = 0$ الى $\theta = \sqrt{2}\,\pi$. ج : 2π

(خ) $r = \sin^4(\frac{\theta}{4})$ ، من $\theta = 0$ الى $\theta = \pi$. ج : $-\frac{5}{3}\sqrt{2} + \frac{8}{3}$

Husam Lotti Saad

١٢- جد مساحة السطح الناتج من دوران قوس من كل منحني من المنحنيات القطبية التالية من $\theta = \theta_1$ الى $\theta = \theta_2$ حول المحور المبين في كل منها.

(أ) النصف العلوي من المنحني $r = a(1+\cos(\theta))$: المحور x . ج : $\frac{32}{5}a^2\pi$

(ب) $r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ ، من $\theta = 0$ الى $\theta = \frac{\pi}{4}$: المحور x . ج : $2\pi a^2(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$

(ت) $r = 2a\cos(\theta)$ ، $a > 0$: المحور y . ج : $2a^2\pi$

١٣- جد حجم الجسم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمنحني $r = f(\theta)$ والشعاعين $\theta = \theta_1$ ، $\theta = \theta_2$ حول المحور القطبي.

(أ) $r = 2\cos(\theta)$ ، الشعاعين $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$. ج : $\frac{4}{3}\pi$

(ب) $r = 2\sin(\theta)$ ، الشعاعين $\theta = 0$ ، $\theta = \pi$. ج : $2\pi^2$

(ت) $r = \cos^2(\theta)$ ، الشعاعين $\theta = 0$ ، $\theta = \pi$. ج : $\frac{4}{21}\pi$

(ث)

(ج) $r = 1+\sin(\theta)$ ، الشعاعين $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$. ج : $\frac{2}{3}\pi(\frac{15}{16}\pi + 3)$

١٤- اختبر تقارب المتتابعات التالية.

(أ) $\sqrt[n]{n}$ ج : متقاربة (ب) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ ج : متقاربة (ت) $\frac{2^n}{n}$ ج : متباعدة

(ث) $\frac{\ln(n)}{n}$ ج : متقاربة (ج) $\frac{\cos(n)}{n}$ ج : متقاربة (ح) $n\tan^{-1}(\frac{1}{n})$ ج : متقاربة

(خ) $\frac{1}{n}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ ج : متقاربة (د) $\frac{3^n-1}{3^n}$ ج : متقاربة (ذ) $\frac{\sin^2(n)}{2^n}$ ج : متقاربة

(ر) $\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}$ ج : متقاربة (ز) $n(1-\cos(\frac{1}{n}))$ ج : متقاربة

١٥- اختبر تقارب او تباعد المتسلسلات التالية.

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$ ج : متباعدة (ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln(n))^n}{n^n}$ ج : متقاربة

(ت) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^{n-1}n^2}$ ج : متقاربة (ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ ج : متباعدة

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ ج : متقاربة (ح) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$ ج : متقاربة

(خ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ ج : متباعدة (د) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ ج : متباعدة

Husam Luti Saad

(ذ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$ ج : متقاربة (ر) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ ج : متقاربة

(ز) $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan(\frac{1}{n})$ ج : متباعدة (س) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$ ج : متباعدة

(ش) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+\sin(x)}\right)^n$ ج : متقاربة (ص) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ ج : متباعدة

(ض) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$ ج : متقاربة

١٦- جد قيم x التي تجعل المتسلسلات التالية متقاربة:

(أ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$ ج : $-4 < x \leqslant 0$ (ب) $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln(x))^n$ ج : $e^{-1} < x < e^1$

(ت) $\sum_{n=0}^{\infty}\sin^n(x)$ ج : $\mathbb{R}/\{\mp(2n+1)\frac{\pi}{2}\}$ (ث) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$ ج : $-1 < x < 1$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n))x^n$ ج : $-1 < x < 1$ (ح) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$ ج : $-\frac{2}{3} \leqslant x < 0$

(خ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^n}{n3^n}$ ج : $0 < x \leqslant 6$

١٧- جد مفكوك متسلسلة ماكلورين للدوال التالية ثم جد فترة تقارب المتسلسلات الناتجة.

(أ) $f(x)=\cos(x)$ ج : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ ، المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

(ب) $f(x)=\cos^2(x)$ ج : $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ ، المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

(ت) $f(x)=(1+x)^p$ ج : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-(n-1))}{n!}x^n$ ، المتسلسلة متقاربة عندما $-1 < x < 1$.

(ث) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ج : $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ، المتسلسلة متقاربة عندما $-1 < x < 1$.

(ج) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ج : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ، المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

(ح) $f(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$ ج : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$ ، المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

(خ) $f(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)$ ج : $2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}$ ، المتسلسلة متقاربة عندما $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

(د) $f(x) = \tan^{-1}(x)$ ج : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ ، المتسلسلة متقاربة عندما $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

١٨- جد مفكوك متسلسلة تايلر للدوال التالية حول النقطة $x = a$ ثم جد فترة تقارب المتسلسلات الناتجة.

(ا) $a = 1\ ,\ f(x) = 2^x$ ج : $2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(2))^n}{n!}(x-1)^n$ ، المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

(ب) $a = 5\ ,\ f(x) = \ln(x)$ ج : $\ln(5) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n5^n}(x-5)^n$ ، المتسلسلة متقاربة عندما $0 < x \leqslant 10$.

Husam L. Saad