وتعبر الصيغة الثانية عن الخاصية التناظرية او التماثلية للذاتية. ويقال للعلاقة انها تناظرية اذا كانت قائمة بين حدين مثل × ، y ، فانها تكون قائمة كذلك بين الحدين y ، × وتعتبر الصيغة الثالثة عن خاصية التعدي للذاتية ، ويقال للعلاقة انها متعدية اذا كانت قائمة بين × و y وبين y و z ، فانها تكون قائمة كذلك بين × و z. ومن اهم الخواص للذاتية التي تنتج عنها معظم الخواص الاخرى مايأتي : –

$$\vdash : x = y . \supset . \phi x \equiv \phi y$$

والفئة ليست الا مجموعة الاشياء التي تحقق دالة قضية. لذا فان كل دالة قضية تعين فئة ، فاذا كانت دالة القضية تلك التي تعين فئة والتي دائما كاذبة ، فان الفئة تكون عندئذ خالية او صفراً ليس لها عناصر. ويختار كتاب اصول الرياضة الحروف الاغريقية للتعبير عن الفئات. فدالة القضية "× عنصر للفئة a يمكن التعبير عنها تبعا للتدوين الرمزي لبيانو كما يأتي : –

$$x \in a$$

اما الفئة فنجد لها تدوينا آخر هو CLs كما في الصورة المنطقية الآتية : –

$a \in CLS$ وتعني ان a هي فئة

وتتعين الفئة كليا عندما تكون عناصرها معروفة ، وبعبارة اخرى : انه لاتوجد فئتان مختلفتان لهما نفس العناصر.

وفي كتاب اصول الرياضة مجموعة من القضايا الواضحة والمهمة وهي : –

$$\vdash \therefore a = B . \equiv : x \in a . \equiv . \in B$$

وتقرأ : فئتان B, a ذاتيا واحدة اذا فقط اذا كانت لهما نفس العناصر.

$$\vdash \hat{x} (x \in a) = a$$

ومعناها : ان الفئة التي دالتها "x ∈ a" هي a وبعبارة اخرى : a فئة الاشياء التي هي عناصر a.

$$\vdash . \hat{z} (\phi z) \in CLS$$

ومعناها : الفئة التي تتعين بالدالة ϕz هي فئة.

وبالنسبة للعلاقات بين الفئات نذكر الحاصل المنطقي (التقاطع) لفئتين

$$a \cap B = \hat{x} (x \in a . x \in B) . Df$$

وبالنسبة للجمع المنطقي (الاتحاد) لفئتين نحصل على التعريف الآتي : –

$$a \cup B = \hat{x} (x \in a . v , x \in B) . Df$$

وبالنسبة لنفس الفئة (المكملة) فان رمزها a– وتقرأ ليس a وتعريفها

$$- a = x (x \sim \in a) Df$$

وبالنسبة لعلاقة الاحتواء فيمكن تعريفها على الوجه الآتي : –

$$a \subset B . = : x \in a . \supseteq x \in B \; Df$$

وفيما يلي مجموعة مختارة من الصيغ في منطق الفئات.

$$\vdash . a \cap B = (- a \cup - B)$$

$$\vdash . a = - (- a)$$

$$\vdash . a \subset B . \equiv \because - a \subset - B$$

$$\vdash . a \subset B . B \subset Y . \supset . a \subset Y$$

تعريف الفئة الخالية : $\Lambda = \hat{x} \; (x \neq x) \; Df$

تعريف الفئة الشاملة : $V = \hat{x} \; (x = x) \; Df$

المبحث الثالث : لغة هلبرت – اكرمان الرمزية :

(٨٢)

ان الطريقة الرمزية التي وضع اسسها كل من دافيد هلبرت واكرمان في كتابها المنطقي المشترك "المعالم الرئيسة للمنطق النظري"، كانت القاعدة التي اقيم عليها بناء المدروسة المنطقية – الرياضية التي تعرف بالصورية او الشكلية Formalism بزعامة هلبرت . وتتميز هذه المدرسة بالبساطة في التدوين الرمزي والاختصار في التعبير، وغايتنا في هذا المبحث ان نرسم الخطوط الرئيسة لهذه الطريقة وبيان قدرتها على التعبير المنطقي وقربها الى اسلوب عالم الرياضيات ، ان المعروف عن هلبرت انه احد اقطاب علماء الرياضيات في هذا العصر، وانه بلا شك انطلق في بناء لغته المنطقية من اعتبارات رياضية مضافا اليها خبرته في عالم الرياضيات ، ومن جهود المدرسة المنطقية Logistic بزعامة برتراند رسل ، وهي المدرسة التي سبقته في نشر انتاجها وفلسفتها الرياضية .

تقوم الطريقة على اساس اختيار متغيرات قضايا ورموز للروابط المنطقية لبناء حساب القضايا . وفيما يلي خطوات بدايات هذه اللغة :–

اولا/ تقوم الحروف اللاتينية الكبيرة مقام متغيرات القضايا وهي :–
X,Y,Z,U ،......

ثانيا/ اما الروابط المنطقية فهي خمسة رموز منطقية ، وهي على التوالي ، مرتبطة برموز القضايا :–
$\bar{X}$: ان الخط الذي يعلو رمز القضية هو خط النفي ، وتقرأ الصيغة بناء على ذلك : ان × قضية صادقة اذا كانت × كاذبة ، وانها كاذبة اذا كانت × صادقة .

ثالثا/ X&Y : وتقرأ : × و Y ، حيث يشير الرمز & الى رابطة العطف ، وهي صادقة في حالة واحدة عند صدق كل من × و Y ، وكاذبة في جميع الحالات الاخرى .

رابعا/ XVY : وتقرأ × أو Y ، حيث يشير الرمز v الى رابطة البدل والقضية البدلية صادقة اذا كانت احدى القضيتين × و Y ، صادقة في الاقل .

خامسا/ X → Y : وتقرأ : اذا × فان y ، حيث يشير الرمز → الى رابطة الشرطية ، والقضية الشرطية كاذبة في حالة واحدة اذا كانت × صادقة و y كاذبة .

سادسا/ X ~ Y : وتقرأ × تكافيء y ، حيث يشير الرمز ~ الى رابطة التكافؤ [ويجب ان لانخلط بين هذه الاشارة واشارة النفي في التدوين الرمزي لرسل] والقضية التكافؤية تكون صادقة في حالتين : عند صدق كل من × وصدق y ، وعند كذبها معا وماعدا ذلك تكون القضية كاذبة .

وينتقل هلبرت الى بناء صيغ اكثر تعقيدا من البسائط السالفة الذكر، ويركز اهتمامه على المتكافئات او المتساويات في القيم Äquivalenzen وفيما يلي جملة من هذه المتكافئات :–[29]

1) $\bar{\bar{x}}$ äq x — للنفي المزوج معنى مساويا للايجاب

2) x & Y äq Y & x — القانون التبديلي للعطف

3) x & (Y & Z) äq (X & Y) & Z — قانون الدمج او الترابط للعطف

4) X v Y äq Y v X — القانون التبديلي للبدل

5) X V (Y v Z) äq (X v Y) v Z — قانون الدمج للبدل

6) X V (Y & Z) äq (X V Y) & (X V Z) — القانون التوزيعي الاول

7) X & (Y V Z) äq (X & Y) V (X & Z) — القانون التوزيعي الثاني

8) X & X äq X

9) X V X äq X

10) X & R äq X — اذا كانت القضية R صادقة فيمكن استبعادها عند صدق القضية العطفية .

11) X & F äq F — القضية T كاذبة اذا كانت القضية العطفية كاذبة

12) X V R äq R — القضية R صادقة اذا كانت القضية البدلية صادقة

13) X V F äq X — القضية × صادقة اذا كانت القضية البدلية صادقة

29) Hilbert, D., & Ackermann, W., Grundzuge der Theoretischen Logik pp. 5– 8.

14) $R \sim X \text{ äq } X;\ X \rightarrow F \text{ äq } X$

15) $F \sim K \text{ äq } R;\ X \rightarrow R \text{äq } R$

16) $X \rightarrow R \text{ äq } X$

17) $X \rightarrow F \text{äq } X$

18) $\overline{X \,\&\, Y} \text{ äq } \bar{X} \text{ V } \bar{Y}$

19) $\overline{X \text{ V } Y} \text{ äq } \bar{X} \,\&\, \bar{Y}$

20) $X \rightarrow Y \text{ äq } \overline{X \,\&\, \bar{Y}}$

21) $X \rightarrow Y \text{ äq } \bar{X} \text{ V } Y$

22) $X \text{ V } Y \text{ äq } \bar{X} \rightarrow Y$

23) $X \rightarrow Y \text{ äq } \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$

24) $X \sim Y \text{ äq } (X \rightarrow Y) \,\&\, (Y \rightarrow X)$

25) $X \sim Y \text{ äq } Y \sim X$

26) $X \sim Y \text{ äq } \bar{X} \sim \bar{Y}$

27) $X \text{ V } Y \text{ äq } \overline{\bar{X} \sim \bar{Y}}$

28) $X \,\&\, Y \text{ äq } \overline{\bar{X} \text{ V } \bar{Y}}$

ويعالج كتاب المعالم الرئيسة للمنطق النظري حساب دالات القضايا على اساس انه حساب المحمولات . فالصيغة ( ) P على سبيل المثال تعني رمز الدالة لمكان خال حيث يمكن وضع مايشير الى اشياء في المكان الفارغ مثال ذلك ان الصيغة P (5) هي المحمول "هو عدد اولي" "وان ٥ عدد اولي" هي قضية وتطبق الروابط المنطقية للقضايا في حساب دالات او المحمولات ايضا ، فنقيض القضية P (5) يعبر عنه بالقضية المنفية $\overline{P(5)}$ وان الصيغة (> (٢ ، ٣) & > (٣ ، ٧) ← > [٢ ، ٧) تقرأ : اذا ٢ اصغر من ٣ و ٣ اصغر من ٧ ، فان ٢ اصغر من ٧ .

ومن العناصر الفكرية في حساب المحمولات كلية القضايا او السور الكلي ، ويعبر عنه بالرمز المحصور بين قوسين والذي يرتبط بالدالة المنطقية الخاصة به .

وبالصورة الاتية : -

(X) A (X) ويعني لكل × تصح A (X)

ويجب التمييز بين الصيغتين الآتيتين : -

$(X)\,\overline{P(X)}$, $\overline{(X)\,P(X)}$

حيث ان النفي في الصيغة الاولى يقع على المحمول او الدالة ، بينما يقع النفي في الصيغة الثانية على كل من سور القضية الكلي والدالة معا .

اما الرمز الخاص بالجزئية والذي يعبر عنه "واحد في الاقل" فان صورته المنطقية مع الدالة الخاصة به كما يأتي : -

(E ×) a (×) ومعناها : يوجد واحد × على الاقل يصح للدالة (×) A .

ويفضل هلبرت تدوين بعض الصيغ بصورة ابسط كما في ادناه : -

بدلا من $\overline{A(X)}$ نكتب بصورة ابسط $\bar{A}(X)$

بدلا من $\overline{(X)\,A(X)}$ نكتب بصورة ابسط $(\bar{X})\,A(X)$

بدلا من $\overline{(EX)\,A(X)}$ نكتب بصورة اسهل $\overline{(EX)}\,A(X)$ (٣٠)

30) Gruundzuge der Theoretischen Logik P:52

وبناء على ذلك تصبح بعض التكافؤات بين الصيغ المنطقية التي تحتوي على اسوار القضايا اسهل وبالصورة التدوينية الآتية : –

$$(EX)\,\overline{A}(X)\ \ddot{a}q\ \ (\bar{X})\,\overline{A}(X)$$
$$(EX)\,\overline{A}(X)\ \ddot{a}q\ \ (X)\,A(X)$$

$$\overline{(EX)}\,A(X)\ \ddot{a}q\ \ (X)\,\overline{A}(X)$$

$$\overline{(EX)}\,\overline{A}(X)\ \ddot{a}q\ \ (X)\,A(X) \qquad (٣١)$$

ونظرا لاهمية هذه التكافؤات نترجمها بلغتنا الرمزية على التوالي كما يأتي : –

(Eأ) س أ ⟷ ¬ {(أ) ¬ س أ}
(Eأ) ¬ س أ ⟷ ¬ {(أ) س أ}
¬ {(Eأ) س أ} ⟷ (أ) ¬ س أ
¬ {(Eأ) ¬ س أ} ⟷ (أ) س أ

ويمكن ان يكون للمحمول اكثر من حد واحد ، وان يكون للصيغة اكثر من سور قضية ، فمن الامثلة البسيطة على ذلك مايأتي : –

$$(X)(y)A(X,y)$$
$$(EX)(Ey)A(X,y)$$
$$(X)(Ey)A(X,y)$$
$$(EX)(y)A(X,y)$$

وهذه الصيغ يمكن عرضها بطريقتنا في التدوين الرمزي على اساس ان المحمول A علاقة بين حدين ، وكما يأتي : –

(أ) (ب) أ R ب : وتقرأ : توجد علاقة R بين أ و ب لكل من أ و ب .
(Eأ) (Eب) أ R ب : وتقرأ : توجد علاقة R بين أ و ب لواحد على الاقل لـ أ ول ب .
(أ) (Eب) أ R ب : وتقرأ : توجد علاقة R بين أ و ب لكل أ ولواحد على الاقل لـ ب .
(Eأ) (ب) أ R ب : وتقرأ : توجد علاقة R بين أ و ب لواحد على الاقل لـ أ ولكل أ .

31) Ibid., P:52

ولهلبرت طريقة خاصة في معالجة بعض الصيغ المنطقية ، وعليه يجب علينا ان نذكر خطوطها العامة لتكون معروفة وواضحة عند مطالعة منطقة ، فهو على سبيل المثال يتناول الذاتية ، الا أن ، اسلوب تدوينه لها يختلف عما هو معتاد في كتابة الاسلوب الرياضي : –

$$\equiv(X,X)$$
$$\equiv(X,y)\rightarrow\ \equiv(y,X)$$
$$\equiv(X,y)\rightarrow(\phi(X)\rightarrow\phi(y))$$
$$(\equiv(X,y)\ \&\ \equiv(y,z)\rightarrow\ \equiv(X,z)$$
$$\equiv(X,y)\rightarrow(\psi(X,z)\rightarrow\psi(y,z)$$
$$\equiv(X,y)\rightarrow(\psi(z,X)\rightarrow\psi(z,y)\ ^{(٣٢)}$$

ويتناول هلبرت منطق الفئات (المجموعات) من خلال حساب المحمولات [المحمولات التي لها حد واحد) ، وبذلك نحتاج الى حساب الفئات الرموز المنطقية المستخدمة في حساب القضايا ، ويقع الاختيار على الحروف اللاتينية الكبيرة لتعبر عن هذا النوع من المحمولات ، فنقول :

× تعني أي محمول مثال ذلك ''انه جميل'' بينما يكون $\bar{\times}$ محمولا منفيا معناه ''انه ليس جميلاً'' واذا كان × يشير الى ''انه بسيط'' وكان لايشير الى ''انه ذو معرفة'' فعندئذ تشير الصيغة X&Y الى المحمول : ''انه بسيط وذو معرفة'' ، وتشير الصيغة X∨Y الى المحمول : ''انه بسيط او ذو معرفة'' وهكذا بهذا التفسير يصبح حساب الفئات جزءاً من حساب المحمولات ، وتصبح القوانين المنطقية لحساب القضايا التي تعتبر اساس الاستدلال المنطقي في حساب المحمولات كذلك ، هي ايضا الاساس المنطقي لحساب الفئات يقوم التفسير على النحو الآتي : –

اولا : ان المحمول وهو صفة تحمل على كل الاشياء اولاتحمل على أي شيء ، والمحمولات بذاتها ليست صادقة وليست كاذبة ، بل نقول انها تحمل على كل الاشياء وتصح عليها .

ثانيا : ولما كانت العملية ربط الفئات بعد تفسير مناسب لمنطق القضايا ، فان هلبرت لايحتاج الى رموز للعمليات بين الفئات ، بل يستخدم الروابط المنطقية الاعتيادية .

32) Ibid., P : 91

$\bar{X}$ = فئة تشتمل على جميع الاشياء التي لاتنتمي الى الفئة × ، ونسمي هذه الفئة مكملة للفئة ×.

اليك هذه رابطة العطف

X & Y = فئة جميع الاشياء التي تنتمي الى × و y معا ، وتعبر عن التقاطع.

XVY = فئة جميع الاشياء التي تنتمى الى احد الفئتين في الاقل.

X → Y = فئة × ليست الا فئة جزئية تتعين من خلال الفئة Y.

X ~ Y = تكون هذه الصيغة صحيحة اذا وفقط اذا كانت الفئة × هي ذات الفئة Y.

ثالثا : اما بالنسبة للقضية الكلية مثال ذلك "كل انسان فان" فانها تصاغ في حساب الفئات كما يأتي : -

الفئة الاتحادية المؤلفة من الفئة "ليست انسان" "والفئة" فان تضم جميع الاشياء وذلك على اساس مايأتي : -

في منطق القضايا نجد الصيغة التكافؤية والتعريفية الآتية : -

ق ←— ل = ت ←— ق ٧ ل

ولاتختلف الحالة كذلك في منطق المحمولات ، حيث نعرضها على هيئة تكافؤية : -

(س أ ←— ص أ) ←— (¬ س ٧ ص).

ولما كانت الفئة في تفسير هلبرت المنطقي تضم جميع الاشياء فلا حاجة بنا اذا الى سور القضية الكلي. ولما كانت القضية.

كل انسان فان=(كل أ) اذا أ انسان فان أ فان.

فان الصيغة في منطق الفئات حسب التفسير الجديد نكتفي بالمحمولات دون ذكر لسور القضية (س أ ←— ص أ) تكافيء (¬ س ٧ ص أ)

ان هذا التفسير يقوم على اساس توحيد منطق القضايا والمحمولات والفئات ، وذلك لان الفئة محمول يحمل على اشياء ، وهذا معناه ان منطق الفئات يدخل في منطق المحمولات اذا مانظرنا الى الفئة بانها محمول ذوحد واحد. وبدون هلبرت المحمول بين خطين عموديين مثل ذلك : |XVY| ليعنـــــي "المحمول الذي يحمل على الكل" ، في حين ان

|X|V|Y| يعني المحمول × الذي يحمل على جميع الاشياء او المحمول y الذي يحمل على جميع الاشياء.

وعندئذ يمكن التعبير عن القضية كذلك فالقضية "بعض الاعداد صماء" يمكن ان تحول على النحو الآتي : "انه ليس صدقاً" بان جميع الاعداد صحيحة وتكون بطريقة التدوين الرمزي |$\bar{X}$VY|

واذا علمنا ان نقيض الجزئية الموجبة هي الكلية السالبة ، وان نقيض الجزئية السالبة هي الكلية الموجبة ، فعندئذ يمكننا تدوين القضايا الارسطية الاربع كما يأتي : -

القضية الكلية الموجبة	$\lvert \bar{X} V Y \rvert$
القضية الجزئية السالبة	$\overline{\lvert \bar{X} V Y \rvert}$
القضية الكلية السالبة	$\lvert \bar{X} V \bar{Y} \rvert$
القضية الكلية الموجبة	$\overline{\lvert \bar{X} V \bar{Y} \rvert}$ (٣٣)

33) Ibid., P: 45.

المبحث الرابع : لغة المدرسة البولندية الرمزية
لغة لوكاسيافتش

(٨٥)

تختلف هذه اللغة عن اللغات الرمزية الاخرى ، فهي مدنية الى اسلوب التدوين الرمزي الذي ابتدعه يان لوكاسيافتش J.Lukasiewics ، والذي يعتمد على الأبجدية اللغوية ، محاولاً في الوقت نفسه التخلص من الأقواس استنادا الى قواعد بنائية معينة . بنائية معينة .

ونظرا لعدم شيوع هذا الاسلوب في التدوين الرمزي في عالمنا العربي سأحاول صياغة كل صيغة منه بطريقتنا المعروفة في التدوين . ونبدأ اولا بالروابط المنطقية ومتغيرات القضايا لنتعرف عن كثب كيفية التعبير عنها ، فالمتغيرات S , p, q هي القضايا فاذا اردنا التعبير عن نفي القضية مثال ذلك :
Not p ، فان الاسلوب المتبع هو اقتطاع الحرف الاول للدلالة على النفي كما في الصورة المنطقية الآتية : —

NP ، ولاجل تثبيت جداول القيم يتبع اسلوب الثنائية O, 1 ، حيث يشير الرقم 1 الى صدق القضية ، والرقم O الى كذب القضية ، وبناء على ذلك نحصل على مايأتي : —
N1 = 0 وتعني نفي الصدق هو الكذب .
N0 = 1 وان نفي الكذب هو الصدق .
وبهذا نحصل على جدول رابطة النفي بالصورة الآتية : —

N	
1	0
0	1

وفي حالة ان تكون القضية عطفية ، فان التدوين الرمزي للمدرسة البولندية يقتطع الحرف من الكلمة Konjunction لتوضع امام القضايا كما في الصورة الآتية : —
K pq ، وهي ق ∧ ل باسلوبنا الرمزي .

ويبدو بوضوح عدم الحاجة الى استعمال الاقواس سواء في هذه الصيغة او في صيغ اخرى . وتظهر كذلك دقة هذا التدوين اذا اخذنا بنظر الاعتبار الصيغتين الآتيتين على سبيل المثال : —
NKpq ، وهي ¬ [ق ∧ ل) باسلوبنا الرمزي .
KNpq ، وهي ¬ ق ∧ ل = =
وكما يبدو ان لاحاجة في مثل هذه الصيغ الى الاقواس .
اما جدول القيم لرابطة العطف فيظهر كما يأتي : —

K	1	0
1	1	0
0	0	0

{ K11 = 1, K10 = 0
K01 = 0, K00 = 0 }

وبعبارة اخرى : ان القضية العطفية صادقة عند صدق القضايا المكونة لها ، وكاذبة في جميع الحالات الاخرى .
واذا كانت لدينا اكثر من قضيتين بينها رابطة العطف ، فيمكن التعبير عنها ببساطة كذلك وبالشكل الآتي : —
K K pqr وهي (ق ∧ ل) ∧ م باسلوبنا الرمزي .
وباسلوب التدوين الرمزي هذا يمكن صياغة دالة الصدق لقضيتين من خلال الرابطة المنطقية " او" وقد استخدم لوكاسيافتش لهذا الغرض الصيغة المنطقية الآتية : —
Apq وذلك باقتطاع الحرف الاول من الكلمة Alternative اما الرابطة المنطقية " او" بالمعنى المطلق فيختار لها الصيغة الرمزية الآتية : —
F pq وتكون جداول القيم لكل رابطة منها كما يأتي : —

A	1	0
1	1	1
0	1	0

F	1	0
1	0	1
0	1	0

A11 = 1 F11 = 0
A10 = 1 F 10 = 1
A01 = 1 F 01 = 1
A00 = 0 F 00 = 0

ويستخدم لوكاسيافتش الحرف D كرابطة منطقية اثنينية كما في الصورة المنطقية الآتية : –
Dpq وتعني ليس معا p و q والجدول المنطقي لهذه الرابطة هو : –

D11 = 0
D10 = 1
D01 = 1
D00 = 1

D	1	0
1	0	1
0	1	1

وبقيت من الروابط المنطقية رابطة الشرطية (اذا ...... فان .....) والتكافؤ (اذا وفقط اذا) . ويختار لوكاسيافتش للشرطية الصورة المنطقية الآتية : –
Cpq على اساس انها قضية شرطية Conditional proposition بمعنى اذا p فان q .
اما جدول القيم للشرطية فهو كما يأتي : –

C11 = 1
C10 = 0
C01 = 1
C00 = 0

C	1	0
1	1	0
0	1	1

اما التكافؤ أو المساواة بين القضايا ، فان الصورة المنطقية لهذه الرابطة كما يأتي : –
Epq على اساس تكافؤ Equivalence بين p و q اما الجدول المنطقي للتكافؤ فهو : –

E11 = 1
E01 = 0
E10 = 0
E00 = 1

E	1	0
1	1	0
0	0	1

اما الآن فنختار بعض القوانين المنطقية باسلوب التدوين الرمزي للمدرسة البولندية .

=CAPPP (ق ٧ ق) ← ق
على اساس ان رابطة البدل A تربط اولا pp ثم تقوم الشرطية C بربط القضية البدلية و p .

=CqAPq ل ← (ق ٧ ل)
على اساس ان A تربط بين pq اولا ثم تقوم الشرطية C بربط q بالقضية البدلية .

=CApqAqp (ق ٧ ل) ← (ل ٧ ق)
على اساس ان A تربط بين pq اولا ثم تقوم A بربط qp ثانيا ، واخيرا تقوم الشرطية C بربط القضيتين البدليتين معا .

=CApAqrAqApr ق ٧ (ل ٧ م) ← ل ٧ (ق ٧ م)
على اساس ان الرابطة A تربط بين p بدليا مع القضية Aqr البدلية . ثم ان الرابطة A تربط q بدليا مع Apr البدلية .

=CCqrCApqApr (ل ← م) ← [(ق ٧ ل) ← (ق ٧ م)]
على اساس ان الشرطية C تربط بين q و r ثم تأتي الشرطية لتربط بين Cqr والقضية البدلية Apq والقضية البدلية Apr .

وللتدوين الرمزي في حساب دالات القضايا بالنسبة للمدرسة البولندية اسلوب ورموز خاصة ، فبالنسبة للمتغيرات او الحدود نجد الحروف الآتية ... X, J, Z كرموز للاسماء ، والرموز etc ... ϕ, ψ, θ محمولات ، وبذلك تتركب صيغ منطقية هي صيغ أو–دالات قضايا مثال ذلك $\psi x, \phi x, \phi y$. وبالتالي يمكننا استخدام الروابط المنطقية مثلما استخدمناها بالنسبة لمنطق القضايا وعلى الوجه الآتي : –

$N\phi x, C\phi x, \psi x$ التي تعادل بالنسبة لتدويننا الرمزي مايأتي : –
س أ ← ص أ و ¬ س أ

ولابد من ادخال اسوار القضايا الى منطق دالات القضايا ، فنتحدث عن "بعض" او "كل" ونختار المدرسة البولندية الرموز الآتية للتعبير عن هذه الاسوار والدالات : –

$\Sigma x\ \phi x$ حيث تقرأ : Σx بانها بعض x ، وبهذا يمكن ان تترجم الصيغة الى مايأتي : (بعض أ) أ يحترق ، وذلك على اساس ان ϕ تدل على المحمول يحترق وبتدويننا الرمزي تكون الصورة المنطقية كما يأتي : (E أ) س أ
واذا ربطنا النفي بهذه الصيغة فيمكن ان يظهر في الصورتين الآتيتين : –

N Σx φx = ¬ [(E أ) س أ]

Σx Nφx = (E أ) ¬ س أ .

اما السور الكلي فيظهر بالصورة المنطقية الآتية : –

(ا) = π ×

ويظهر هنا التميز بوضوح بين المتغير المقيد باحد أسوار القضايا ، والمتغير الحر غير المرتبط باعتباره غير مقيد باي سور من اسوار القضايا .

ونختار فيما يأتي بعض الصيغ المنطقية من هذا الحساب وكيفية تدوينها : –

πx Cφx ψx = (أ) [س أ ⟵ ص أ]

Cπx φx φx = (أ) س أ ⟵ س أ

Cπx Nφx Nφx = (أ) ¬ س أ ⟵ ¬ س أ

Cφx Nπx Nφx = س أ ⟵ ¬ [(أ) ¬ س أ]

Cφx Σx φx = س أ ⟵ (E أ) س أ

Cπx φx Σx φx = (أ) س أ ⟵ (E أ) س أ

وبهذا الاسلوب في التدوين الرمزي نحصل على تكافؤات من المربع المنطقي الاوسطي كما هو الحال مع بقية الاساليب اثباتا لجدارة هذا الاسلوب في التدوين وفي التعبير الدقيق عن الحقائق المنطقية المختلفة .

١) فمن المعروف ان القضية الكلية السالبة تكافيء منطقيا نفي القضية الجزئية الموجبة وذلك لان بين القضية الكلية السالبة والقضية الجزئية الموجبة تناقض ، وان هذا التناقض يرتفع بنفي احدى القضيتين : –

القضية الكلية السالبة = πx Nφx

القضية الجزئية الموجبة = Σx φx

التكافؤ بينها NΣx φx = πx Nφx

٢) ان القضية الكلية الموجبة تكافيء منطقيا نفي الجزئية السالبة ، وذلك لان بين القضية الكلية الموجبة والقضية الجزئية السالبة تناقض ، وان هذا التناقض يرتفع بنفي احدى القضيتين : –

القضية الكلية الموجبة = Σx Nθx

القضية الجزئية السالبة = πx φx

التكافؤ بينها NΣx Nφx = πx φx

٣) ان القضية الجزئية السالبة تكافيء منطقيا نفي القضية الكلية الموجبة ، وذلك لان بين القضية الكلية الموجبة والقضية الجزئية السالبة تناقض ، وان هذا التناقض يرتفع بنفي احدى القضيتين : –

القضية الجزئية الموجبة Σx φx

القضية الكلية السالبة πx Nφx

التكافؤ بينها Nπx φx ∴ = Σx Nφx

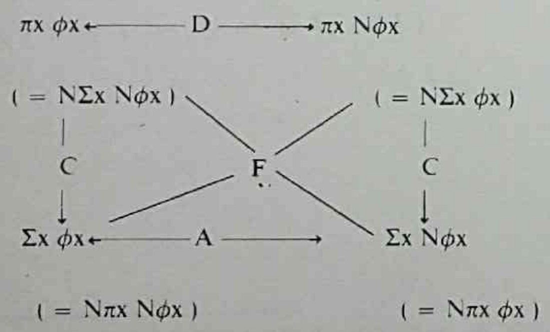
٤) ان القضية الجزئية الموجبة تكافيء منطقيا نفي الكلية السالبة ، وذلك لان بين القضية الكلية السالبة والقضية الجزئية الموجبة تناقض ، وان هذا التناقض لايرتفع الا بنفي احدى القضيتين : –

القضية الجزئية الموجبة Σx φx

القضية الكلية السالبة πx Nφx

التكافؤ بينها Nπx Nφx = Σx φx

وبناء على هذا التحليل والتعادلات او التكافؤات بين قضايا المربع المنطقي يمكننا الان عرض صورته المنطقية بجميع علاقاته كما يأتي : –



ولابد من الاشارة هنا بان تشابها كبيرا يوجد بين المربع المنطقي الاوسطي ، والمبادئ المعروفة باسم قوانين دي مورجان De Morgan's Laws [٣٤] ، ويمكن عرض هذا التشابه بترتيب القضايا المتضمنة في قوانين دي مورجان في مربع منطقي.

١- القضية التي تربط نفي القضية الاولى ونفي القضية الثانية برابطة العطف تكافيء نفي القضية البدلية وبالصورة الآتية :-
NApq = KNpNq [بتدويننا الرمزي يكون هذا التكافؤ كما يأتي :-
¬ ق ∧ ¬ ل ⟷ ¬ (ق ∨ ل)]

٢- القضية العطفية تكافيء نفي القضية البدلية التي يربط فيها البدل بين نفي القضية الاولى ونفي القضية الثانية وبالصورة الآتية :-
NANpNq = Kpq [وبتدويننا الرمزي يكون هذا التكافؤ كما يأتي :-
ق ∧ ل ⟷ ¬ (¬ ق ∨ ¬ ل)]

٣- القضية البدلية التي يربط البدل فيها بين قضيتين منفيتين تكافيء نفي القضية العطفية وبالصورة الآتية :-
NKpq = ANpNq [وبتدويننا الرمزي يكون هذا التكافؤ كما يأتي :-
¬ ق ¬ ل ⟷ ¬ (ق ∧ ل)]

٤- القضية البدلية تكافيء نفي القضية العطفية التي تربط العطف فيها بين نفي القضية الاولى ونفي القضية الثانية وبالصورة الآتية :-
NkNpNq = Apq [وبتدويننا الرمزي يكون هذا التكافؤ كما يأتي :-
ق ∨ ل ⟷ ¬ (¬ ق ∧ ¬ ل)

٣٤) تجد قوانين دي مورجان والمربع المنطقي له ، وكذلك المربع المنطقي الاوسطي بالصيغة التي عرضناها في كتاب Prior, A.N., Formal Logic, p78.

اما المربع المنطقي لقوانين دي مورجان فيظهر كما يأتي :-

$$\begin{tikzcd}
Kpq\ (= NANpNq) \arrow[d, "C"'] & D \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, phantom, "F"] & KNpNq\ (= NApq) \arrow[d, "C"] \\
Apq\ (= NKNpNq) & A \arrow[l] \arrow[r] & ANpNq\ (= NKpq)
\end{tikzcd}$$

((المراجع الرئيسية للتدوين الرمزي))

1) Carnap, R., the logical Syntax of Language (Routledge & Kegan Paul ltd, London Fourth impression 1954).

2) Frege, G., Begriffsschrift: Formelsprache des reineiele (George OLMS, Hildesleim Zweite Auflage 1964)

3) Hilbert, D., & Ackermann, W., Grundzuge der theoretischen Logik (Springer – Verlag/Berlin, Gottingen, Heidelberg, Dritte Auflage 1949).

4) Heyting, A., Intuitionism, An Introduction (North – Holland publishing company Amsterdam, 1956).

5) Lipschutz, S., Set theory and Relatd topics (Schaums outline series Mcgraw – Hill Book company, New York, 1964).

6) Prior, A.N., Formal logic (Oxford at the Clarendon press, 1955).

7) Reichenbach, H., Elements of symbolic logic (the Macmillan company, NEW York 1947).

8) Whitehead, A.N. & Russell, B., Principia Mathematica (VOL., Second Edition, Cambridge 1957).

9) Wittgenstein, L, Tractatus Logico – Philosophicus (Routledge & Kegan Paul, sixth impression LONDON 1955).

١٠) اما التدوين الرمزي باللغة العربية ، فهو تدوين مختلط ابتغاء البساطة في القراءة والطباعة ، وقد اعتمدت في بنائه على التدوين الرمزي لبرتراندرسل وهايتنج والمدرسة المنطقية التي تخرجت فيها وهي مدرسة مونستر Munster scnool وكانت بزعامة الاستاذ الدكتور هانس هيرمز Prof. Dr. Hans Hermes اثناء دراستي في معهد المنطق الرياضي والبحوث الاساسية التابع لجامعة مونستر Munster University وكان من اساتذة المعهد كل من .Prof. Dr و W. Ackermann Prof. Dr. G. Hasenjaeger واضفت من عندي عددا كبيرا من الرموز نتيجة لتدريسي موضوع المنطق الرياضي لاكثر من عشرين عاما ، ولتكييف اسلوب التدوين الرمزي للغة العربية .