وبالطريقة ذاتها يمكن ان نجد العلاقة غير منعكسة ، وذلك على اساس ان المجموعة تحتوي العناصر الآتية : –

{ ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

وتعين العلاقة في المجموعة من خلال دالة القضية أ R أ فاذا افترضنا ان العلاقة في المجموعة هي : –

{ (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٦ ، ٦) ، (٨ ، ٨) }

فأن R عندئذ غير منعكسة طالما ان (٢ ، ٤) لاتعبر عن أ R أ .

المثال الثالث : العلاقة R متناظرة اذا كانت أ بعلاقة R مع ب فان ب بعلاقة R مع أ كذلك .

نفترض مجموعة تتألف من العناصر الآتية : –

{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

وان العلاقة بين العناصر في هذه المجموعة هي : –

{ (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) }

وتكون العلاقة غير متناظرة اذا ظهرت بالصورة الآتية : –

نفترض مجموعة تتألف من العناصر الآتية : –

{ ١ ، ٢ ، ٣ }

وان العلاقة بين العناصر في هذه المجموعة هي : –

{ (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ١) }

فهي ليست متناظرة طالما ان العلاقة (٢ ، ٣) لاتتضمن (٣ ، ٢)

المثال الرابع : العلاقة R متعدية اذا كانت أ بعلاقة مع ب وب بعلاقة مع جـ فان نفترض العلاقة R ، وان العناصر التي ترتبط بها هي أ ، ب ، جـ نعرف ان نعين هذه العلاقة من خلال وجودها في الاعداد الحقيقية ، وعلى اساس الدالة "أ اصغر من ب" .

وبذلك نحصل استنادا الى مابدأنا به في تحديد العلاقة المتعدية ان أ اصغر من ب و ب اصغر من جـ فان أ اصغر من جـ وهكذا تكون العلاقة "اصغر من" علاقة متعدية ، وندونها رمزيا كما يأتي : –

أ < ب ∧ ب < جـ ⟵ أ < جـ

واذا افترضنا مجموعة تتألف من العناصر الآتية : –

{ أ ، ب ، جـ }

وكانت R في المجموعة بالصورة الاتية : –

{ (أ ، ب) ، (جـ ، ب) ، (ب ، أ) ، (أ ، جـ) }

فان العلاقة R غير متعدية طالما ان (جـ ، ب) لاتنتمي الى العلاقة R وكذلك (ب ، أ) تنتمي الى R ولكن (جـ ، أ) لاتنتمي الى R .

وبالتدوين الرمزي نحصل على الصورة الآتية : –

ان (جـ ، ب) ∧ (ب ، أ) ولكن لاتوجد (جـ ، أ) لتكمل صفة العلاقة المتعدية .

المثال الخامس : ان العلاقة R متكافئة اذا كانت R منعكسة (أ R أ) وكانت متناظرة (أ R ب) ⟵ (ب R أ) ، وكانت متعدية (أ ، ب) ∧ (ب ، جـ) ⟵ (أ ، جـ) .

نفترض ك بمجموعة المثلثات في الهندسة المستوية ونفترض ان R هي العلاقة في المجموعة ك ، وان تعرف على "أ تتشابه مع ب" .

بناء على ذلك تكون R منعكسة ، متناظرة ومتعدية . وبذلك تكون R علاقة متكافئة .

ويصدق ذلك في مثال ابسط عند الاستعاضة بالذاتية حيث :

ان : أ = أ

أ = ب ⟵ ب = أ

أ = ب ∧ ب = جـ ⟵ أ = جـ

(٧،٥)

وهناك امثلة في المنطق والعلوم والحياة العامة تبين مدى اهمية العلاقات وتطبيقاتها ، فعلاقة الاختلاف على سبيل المثال هي علاقة غير منعكسة في اية مجموعة من الاشياء ، لانه لايوجد اي شيء يختلف عن نفسه ولكن العلاقة في الوقت نفسه تناظرية ، لانه لو كانت.

أ ≠ ب فان ب ≠ أ

واذا تفحصنا العلاقة من زاوية كونها علاقة متعدية ، فسوف نجد ان اختلاف أ عن ب واختلاف ب عن جـ ، لايتضمن بالضرورة اختلاف أ عن جـ ، بعبارة اخرى : —

أ ≠ ب ∧ ب ≠ جـ ↛ أ ≠ جـ .

وهناك علاقات اخرى ذات اهمية كذلك نذكر بعضها : —

العلاقة R مثلا هي علاقة واحد – كثير One – Many اذا كان لكل أ يوجد شيء واحد مثل ب يقابله ، بحيث ان لنا دالة قضية أ R ب ، وبعبارة اخرى : ، اذا كانت الصيغ.

أ R ب ∧ جـ R ب فان أ = جـ

ويقال عن العلاقة R انها ارتباطية Connexity ، فاذا كانت العلاقة R وحقل R ، فانه ليس ضروريا بان اي حدين من الحقل يرتبط بالعلاقة والعلاقة المعكوسة ، مثال ذلك العلاقة "السلف لـ" فهي بالنسبة للحقل "الجنس البشري" لاتتضمن بان لكل زوج من الحدود علاقة قائمة. اما اذا كانت العلاقة قائمة فعندئذ يقال عنها انها مرتبطة. فالارتباطية علاقة مثل R ترتبط اذا ماأعطي أي حدين فتكون اما أ R ب أو ب R أ (العلاقة والعلاقة المعكوسة) ، فاذا لم تقم مثل هذه الحالة يقال للعلاقة R بانها ليست مرتبطة.

واذا كانت العلاقة متعدية وغير متناظرة ومرتبطة فعندئذ يقال ان العلاقة مسلسلة مثال ذلك التوالي بالزيادة في الحساب ، "فاكبر من" محصورة في حقل الاعداد الطبيعية ، فهي مرتبطة ، مادام أي عددين يكون الواحد اكبر من الآخر ، وان هذه العلاقة متعدية دون شك وغير متناظرة ، فهي بذلك تحقق متوالية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ....

العلاقة R تكون علاقة كثير–كثير اذا كان النطاق ومعكوس النطاق يمكن ان يحتوي اكثر من عنصر واحد ، وان اختيار حد من احدهما لايؤدي الى تعيين اختيار حد من الآخر مثال ذلك "اخت لـ".

ويقال عن العلاقة R انها علاقة واحد بواحد One – One اذا كان اختيار حد من النطاق يعين اختيار حد آخر من معكوس النطاق وبالعكس ، مثال ذلك "اكبر ابناء آ ب" و "اكبر بواحد" اذا كانت لدينا علاقة R وهي : —

R = {(١ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (١ ، ٤) ، (٤ ، ٦) ، (٣ ، ٧) ، (٧ ، ٦)}

فان نطاق العلاقة يحتوي مجموعة العناصر الاولى في R ، وهذا معناه ان نطاق العلاقة R هو : —

{١ ، ٤ ، ٣ ، ٧}

اما معكوس النطاق فانه يحتوي مجموعة العناصر والثانية في R ، وهذا معناه ان معكوس النطاق هو : —

{٥ ، ٤ ، ٦ ، ٧}

اما معكوس العلاقة R فانه يحتوي على مجموعة نفس الازواج في العلاقة R ولكن بترتيب معكوس : —

{(٥ ، ١) ، (٥ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٦ ، ٤) ، (٧ ، ٣) ، (٦ ، ٧)}

الفصل الخامس

اللغات الرمزية

المبحث الاول : لغة فريجة الرمزية

(٧٦)

ان التطور السريع الذي اصاب المنطق الرياضي منذ النصف الثاني للقرن التاسع عشر وحتى الآن لم يتناول مفاهيم ومبادئ وانظمة المنطق فحسب ، بل تجاوز ذلك الى استحداث لغات رمزية مختلفة للتعبير عن حقائق المنطق والرياضيات . ومن هذه اللغات ماتحول الى ظاهرة عامة ، بعد مرور فترة من المزمن ، فاستخدمت على نطاق واسع مثل اللغة الرمزية التي ابتدعها بيانو (١٨٥٨-١٩٣٢) وطورها كل من رسل (١٨٧٢-١٩٧٠) ووايتهيد (١٨٦١-١٩٤٧) في كتابهما "اصول الرياضيات" Principia Mathematica [١٢] ، في حين استطاعت مدارس منطقية اخرى من تطوير لغاتها الرمزية ، وكانت غايتها التبسيط وحذف كل ماليس له ضرورة منطقية وعلمية ، فكتب بها الاعضاء المنتمون ولكن لم يكتب لها الانتشار الكبير مثل لغة مدرسة وارشو البولندية . والى جانب ذلك نجد علماء رياضيات ومناطقة قد استحدثوا لغاتهم الرمزية الخاصة ، فشاركهم في ذلك طلابهم مثال ذلك اللغة الرمزية لهلبرت [١٣] . وهناك لغات رمزية مختلطة طورها علماء المنطق لاغراض البحث ، فبقيت مقصورة عليهم وعلى نطاق ضيق .

١٢) يقع هذه الكتاب في ثلاثة مجلدات كبيرة ، وقد جاء بعد محاولات برتراند رسل رد الرياضيات الى المنطق في كتابة "مبادئ الرياضيات" Principles Of Mathematics ، الذي نشره سنة ١٩٠٣ ، وكان بلغة غير رمزية . وظهر الجزء الاول من كتاب "اصول الرياضيات" سنة ١٩١٠ والجزء الثاني سنة ١٩١٢ والجزء الثالث سنة ١٩١٣ ، وقد شارك الفريد نورث وايتهيد بالاجزاء الثلاثة .

١٣) الف ديفيد هلبرت مؤلفات عديدة في الرياضيات والمنطق ، الا اننا اعتمدنا لغته الرمزية التي كتب بها منطقه في كتاب اسس المنطق النظري Grundzuge Der Theoretischen Logic الذي نشره مع اكرمان سنة ١٩٢٨ .

ويبرز عالم الرياضيات جوتلوب فريجية (١٨٤٨ – ١٩٢٥) مؤسسا للغة رمزية غريبة الشكل ذات بعدين ، وقد عبر بها بسهولة عن حقائق المنطق والرياضيات . ونقول عنها انها غريبة الشكل لانها ذات بعدين وليست ذات بعد واحد كما جرت العادة في الكتابة الرياضية عند علماء الرياضيات ، لذلك لم تنتشر بين الاوساط المنطقية والرياضية على الرغم من دقتها وامكانية التعبير بها بيسر وسهولة . وتكتسب هذه اللغة اهميتها من ناحيتين . الاولى من خلال استحداث فريجة لاسلوب رمزي في الكتابة المنطقية والرياضية ، والثانية من خلال استحداث فريجة لمنطق جديد بمفاهيم ومبادئ وانظمة جديدة ، فهو اول من استطاع بناء نظام بديهي لمنطق القضايا ودالات القضايا ، واضاف بتحليلاته الرائقة لمفاهيم الرياضيات مفاهيم منطقية ليكون قادرا على البرهان بان علم الحساب ماهو الا علم متطور اساسه المنطق ، فكان مؤسس الفلسفة الرياضية بحق.

وبناء على ماتقدم سنختار اللغات الرمزية الآتية : –

اولا : لغة فريجة الرمزية باعتبارها فريدة من نوعها وعلى باحث المنطق ان يكون على معرفة بها ، لان ماخلفه فريجة من ابداعات منطقية تفوق ماقدمه ارسطو في المنطق [١٤] . بالاضافة الى ان فريجة هو المؤسس للفلسفة الرياضية ورائد المنطق الرياضي المعاصر، واحد فلاسفة اللغة الكبار، وقد افاد من كتاباته جميع علماء المنطق والرياضيات .

ثانيا : لغة رسل – وايتهيد باعتبارها اللغة المنطقية الاكثر انتشارا في الاوساط المنطقية وهي لغة ذات بعد واحد عبرت بسهولة عن جميع حقائق المنطق وفروع الرياضيات البحتة واستعاضت عن الفاظ لغة الحياة اليومية التي غالبا ماكانت مستخدمة في كتب المنطق والرياضيات . كما ان لهذه اللغة اهمية كبيرة لانها اكثر اتساعا وثراء من غيرها بحيث تصلح للتدوين الرمزي لكافة فروع الرياضيات اضافة الى بعض الاجزاء من الفيزياء الحديثة وقد جرت على هذه اللغة تعديلات كثيرة من قبل بعض المناطقة امثال فنجنشتاين [١٥] . (١٨٧٩ – ١٩٥٢) وغيره ، وكان القصد التبسيط وازالة ما ليس له اهمية منطقية .

ثالثا : لغة مدرسة وارشو البولندية باعتبارها اللغة المنطقية التي كتب بها علماء المنطق في وارشوا ابحاثهم المنطقية ، وهي ابحاث مبتكرة لابد لباحث المنطق من الاطلاع عليها ومعرفتها ، اذا استطاعت هذه المدرسة ان تنشر ابحاثا منطقية في فروع منطقية مستحدثة ، كما برهنت على تفوق لغتها الرمزية في التعبير عن حقائق المنطق والرياضيات ، والاستغناء عن بعض الرموز مثل الاقواس الموجودة في اللغات الرمزية الاخرى. ولايزال بعض اعضاء المدرسة خارج بولندا يكتبون دراساتهم وابحاثهم ومؤلفاتهم المنطقية بهذه اللغة [١٦] .

رابعا : لغة هلبرت الرمزية باعتبارها لغة مختلطة اخذت من اللغات الرمزية ، وبخاصة لغة رسل – وايتهيد ، واستحدثت رموزا اخرى الى جانب ذلك ، اضافة الى محاولة التبسيط في التعبير الرمزي وتكتسب هذه اللغة اهميتها من الابحاث والدراسات والكتب التي نشرها هلبرت ، حتى تحول منهجة في البحث الى مدرسة عرفت باسم " المدرسة الصورية او الشكلية Formalism " وقد اصبح لهذه المدرسة موقعا كبيرا بين علماء الرياضيات في العالم نظرا لتوجه فلسفة هلبرت الى الرياضيات والمنطق معا على اساس انها مترادفان ولا اسبقية لاحدهما على الآخر : –

---

١٤) نشر فريجة كتابه الاول " اللغة الرمزية Begriffsschrift سنة ١٩٧٩ وقد تضمن محاولاته الاولى في بناء لغة صورية للمنطق والرياضيات .
ثم نشر من كتبه اسس علم الحساب Grundlagen der Arithmetik سنة ١٨٨٤ ليبرهن على ان اساس علم الحساب هو علم المنطق من خلال سؤاله المشهور ماالعدد؟
ونشر كتابه الرئيس الذي يقع في جزأين تحت عنوان القوانين الاساسية لعلم الحساب Die Grundgesetze der Arithmetik الجزء الاول سنة ١٨٩٣ والجزء الثاني ١٩٠٣ .
بالاضافة الى ماتقدم نشر فريجة مجموعة منطقية كبيرة في المنطق على هيئة مقالات ذات اهمية فلسفية ولغوية ومنطقية ، كان من ابرزها " المعنى والدلالة " .

١٥) من ابرز مؤلفات فنجشتاين L. Wittgenstein الذي تناول كتاب اصول الرياضية لرسل ووايتهيد بالنقد والتحليل كتابة الرئيس "رسالة منطقية" فلسفية Tractatus Logico – Philosophicus التي نشرها سنة ١٩٢٢ باللغتين الانكليزية والالمانية ، وكانت الرسالة مدونة اولا بالالمانية ونشرت في العدد الاخير من اخبار او ستوالد للفلسفة الطبيعية سنة ١٩٢١ بعد أن اجرى المؤلف على النص الاصلي بعض التعديلات .

١٦) من المبرزين الذين كتبوا مؤلفاتهم المنطقية بلغة مدرسة وارشوا البولندية بريور– A. N. Prior فيكتابة المنطق الصوري Formal Logic ، وقد اعتمدنا على هذا المؤلف في عرض اللغة الرمزية لهذه المدرسة .

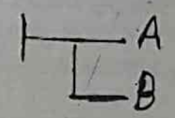
(٧٧)

نبدأ اولا باللغة الرمزية لفريجة التي بدأ صياغتها في كتابة "اللغة الرمزية Begriffsschrift وتوسع فيها في كتابة الرئيس" القوانين الاساسية لعلم الحساب Grundesetze der Arithmetik الذي يقع في جزأين .

يبدأ فريجة بمفهوم القضية باعتبارها محور البحث المنطقي في نظرية القضايا ، فهي قول محتواه يحتمل الصدق او الكذب ، لذلك يرى انه من الضروري الاشارة الى ان القضية صادقة اوكاذبة باختيار رمز مناسب يوضع قبل رمز القضية . فالقضية A لايمكن ان تفهم انها قضية الا أذا ، وضع قبلها خط افقي A—— يشير الى المحتوى او ان A قضية اما اذا اريد القول بان القضية A صادقة ، فان فريجة يضيف خطا آخر عموديا في نهاية خط المحتوى ، ويطلق عليه اسم خط الصدق وبالصورة الآتية : −

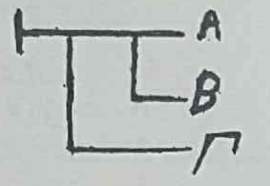
A ⊢ بمعنى ذلك ان القضية A صادقة مثال ذلك قولنا "ان الاقطاب المغناطيسية المختلفة متجاذبة . ويعتمد منطق فريجة على النفي والشرطية كروابط اساسية للعبّير عن جميع الروابط المنطقية الاخرى ، وهو بذلك يستغني عن رموز خاصة يدونها للبدل او للبدل المطلق او العطف او التكافؤ وغير ذلك ، اذ لايوجد في منطقة غير النفي والشرطية كروابط منطقية فقط . ويبدأ اولا برابطة الشرطية ، فاذا افترضنا ان كلا من A و B قضايا فان اربعة احتمالات قائمة وهي : −

١) A موجبة (صادقة) و B موجبة (صادقة)
٢) A موجبة (صادقة) و B منفية (كاذبة)
٣) A منفية (كاذبة) و B موجبة (صادقة)
٤) A منفية (كاذبة) و B منفية (كاذبة)



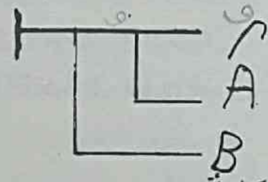
وهذا الرسم يشير الى ان القضية B يلزم عنها القضية A ، حيث يشير الخط الرابط بين خطي محتوى القضيتين الى خط الشرطية .

واستنادا الى الاحتمالات الاربعة ، فان القضية الشرطية قائمة في جميع الاحتمالات ماعدا الاحتمال الثالث عندما تكون القضية B موجبة والقضية A منفية وهذه الطريقة في التدوين الرمزي تتيح التعبير عن اكثر من قضيتين وقد ربطت بينها الشرطية ، فاذا كانت ثلاث قضايا على سبيل المثال ، فيمكن ان تترابط بالشرطية على الوجه الآتي : −



ونكتب بتدويننا الرمزي كما يأتي : −

ق ←—— (ل ←—— م)



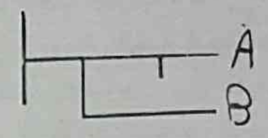
ونكتب بتدويننا الرمزي كما يأتي : −

(ل ←—— م) ←—— ق

وعلى اساس ان Γ = ق ، A = م ، B = ل

وللتعبير عن النفي يلجأ فريجة الى رسم خط صغير يكون عموديا من الاسفل على خط محتوى القضية كما في الصورة الآتية : −

ونقرأ : بان القضية A غير قائمة او منفية (او كاذبة)
وفي حالة ارتباط النفي والشرطية في صيغة واحدة نجد عدة احتمالات .



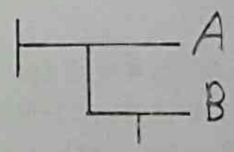
وتكتب بطريقتنا في التدوين الرمزي كما يأتي : -

ل ←—— م

ومعناها أن الحالة غير قائمة (كاذبة) عند صدق B ونفي المنفية A [17] .
وبعبارة اخرى : أن الحالة غير قائمة بان تكون القضية B والقضية A صادقتين معا ، وتكون الحالة قائمة او صادقة في الحالات الآتية : -

عندما تكون A موجبة و B منفية .
عندما تكون A منفية و B موجبة .
عندما تكون A منفية و B منفية .

ويطرح فريجة صيغة اخرى تكون فيها القضية B منفية في قضية شرطية صادقة وبالصورة الآتية : -



وتكتب بطريقتنا في التدوين الرمزي كما يأتي : -

¬ ل ←—— Γ

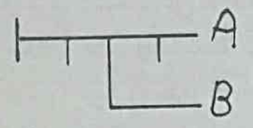
ومعناها : ان الحالة غير قائمة (كاذبة) عندما تكون A منفية والنفي للقضية B ايجابية [18] .
وبعبارة اخرى : القضية A و B معا لايمكن ان تكونا كاذبتين أو منفيتين. وتكون الحالة قائمة او صادقة في الحالات الآتية : -

17) Frege G., Begriffsschrift P:10 Hildesheim 1964.

18) Ibid., P:10.

عندما تكون القضية A موجبة و B موجبة .
عندما تكون القضية A موجبة و B منفية .
عندما تكون القضية A منفية و B موجبة .

والصيغة الجديدة التي يطرحها فريجة تحتوي على الشرطية وعلى نفي يسبق كل الصيغة ونفي آخر هو نفي القضية A وبالصورة الآتية : -



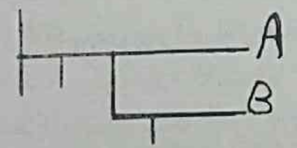
وتكتب بطريقتنا في التدوين الرمزي كما يأتي : -

¬ (ل ←—— ¬ م)

ومعناها : ان الحالة قائمة عندما تكون القضية A والقضية B موجبتين معا [19] .
وتكون الحالة غير قائمة في الحالات الثلاث المتبقية وهي : -

عندما تكون القضية A موجبة و B منفية
عندما تكون القضية A منفية و B موجبة
عندما تكون القضية A منفية و B منفية

والصيغة الاخرى التي يدونها فريجة بطريقته الرمزية تحتوي على الشرطية وعلى النفي الذي يسبق كل القضية وبالصورة الآتية : -



وتكتب بطريقتنا في التدوين الرمزي كما يأتي : -

¬ (¬ ل ←—— م)

ومعناها : ان الحالة قائمة عندما تكون B منفية وكذلك A معا [20] . وتكون بالطبع الحالات الثلاث النافية غير قائمة وهي : -

19) Ibid., P: 12

20) Ibid., P: 13.

عندماتكون القضية A موجبة و B موجبة
عندما تكون القضية A موجبة و B منفية
عندما تكون القضية A منفية و B موجبة

(٧٨)

ويتناول فريجة في لغته الرمزية مفاهيم منطقية اخرى هي : الذاتية والدالة والكلية ويرى ان الذاتية تختلف عن الشرطية والنفي في كونها تنسحب على الاسماء ، وذلك على اساس ان رمزا من الرموز له نفس المحتوى لرمز آخر مختلف عنه . وهذا معناه ان الذاتية قائمة بين رمزين مختلفين لها نفس المحتوى ، فاذا كان لدينا الرمز A والرمز B واردنا ان نعبر عن الذاتية بينها . فان فريجة يختار رمزا للذاتية مع ابقاء الرمز الذي يشير الى خط المحتوى وخط الصدق قبل الصيغة فيصبح لدينا مايأتي : -

$\vdash (A \equiv B)$ ($\equiv$ رمز للذاتية)

وبتدويننا الرمزي : أ $\equiv$ ب على اساس ان أ لها نفس المحتوى لـ ب ومن ابرز خصائص الذاتية هي ان الرمز أ والرمز ب لهما نفس المحتوى الفكري ، بحيث يمكن دائما ابدال أ مكان ب وبالعكس.

اما الدالة في المنطق فان فريجة يرى انها الجزء الثابت الذي يعرض مجموع العلاقات ، وان الرمز الذي يمكن ان يستبدل بغيره والذي يعني الشيء الموجود في هذه العلاقات هو حد الدالة [٢١] . والمثال على ذلك قولنا : ان غاز الاوكسجين اخف وزنا من غاز الكاربون حيث نستطيع ابدال الرمز لغاز الاوكسجين برمز آخر لغاز الهيدروجين. وبهذا يكون الجزء المتغير او المتبدل في العبارة هو الحد ، ويكون الجزء الثابت فيها "اخف وزنا من الكاربون" هو دالته او الدالة . كما يمكن النظر الى العبارة بشكل آخر ، فنرى فيها الجزء "اخف وزنا" هو الثابت بينما الرمز لغاز الاوكسجين ولغاز الكاربون يستبدلان ، برمزين آخرين ، فيكون الجزء الثابت هو الدالة والجزءآن المتغيران هما الحد الاول والحد الثاني . وللتعبير عن دالة ذات حد واحد واخرى ذات حدين على سبيل المثال وبلغة فريجة الرمزية نختار رمز للدالة ورموز للحدود فتظهر بالصورة الآتية : -

21) Ibid., P:15

$\vdash \phi(A)$ وتقرأ ان لـ A الصفة ϕ

$\vdash \psi(A, B)$ وتقرأ ان A في علاقة ψ مع B

وبتدويننا الرمزي تعبر عن هاتين الدالتين كما يأتي : -

س أ بالنسبة للدالة ذات الحد الواحد

أ R ب بالنسبة للدالة ذات الحدين

ويتناول فريجة في تدوينه الرمزي اسوار القضايا ، فيقتصر على ذكر السور الكلي ، بينما يتم عرض صورة السور الجزئي بواسطة السور الكلي والنفي ، وبذلك يكون فريجة قد استغنى في منطقه عن ادخال رمز خاص بالسور الجزئي. وتتم هذه العملية على وفق الاجراءات الرمزية الآتية : - يرتبط سور القضية عادة بالمتغير في الصيغة ، فاذا اردنا التعبير عن الكلية ، فاننا نقتصر على ذكر كلية الحد او المتغير مع ابقاء الدالة باعتبارها الصفة التي تحمل على الكل. وبهذا الفهم المنطقي يجعل فريجة للمتغير في خط المحتوى فجوة للدلالة على الكل وبالصورة الآتية : -

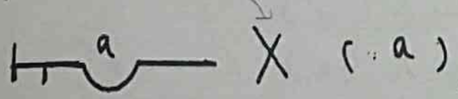
 $\phi(a)$،

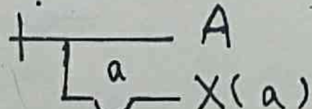
وبتعبيرنا الرمزي تترجم هذه الصيغة كما يأتي : -

(أ) س أ : ومعناها : ان س تحمل على كل أ

وترتبط الدالة ذات السور الكلي بالشرطية مع قضية اخرى او ترتبط بالنفي وفق التصور الآتي : -

رمز السور الكلي

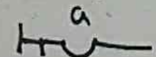


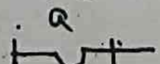


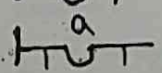
وبتعبيرنا الرمزي تترجم هاتين الصيغتين كما يأتي : -

(أ) س أ ⟵ م ، ¬ [(أ) س أ]

والآن نعرض احتمالات ارتباط النفي بالسور الكلي : -

١- $\times(a)$  أي : ¬ [(أ) س أ]

٢- $\times(a)$  أي : (أ) ¬ س أ

٣- $\times(a)$  أي : ¬ [(أ) ¬ س أ]

والصيغة الثالثة او الاخيرة هي تعبير عن الجزئية او السور الجزئي بواسطة السور الكلي والنفي . وبتعبير آخر :-

¬ [(أ) ¬ س أ] ⟷ (E أ) س أ

او أن (E أ) س أ = ت ¬ [(أ) ¬ س أ]

والصيغة الاخيرة تعريفية ، حيث نعرف سور القضية الجزئي بواسطة سور القضية الكلي والنفي ، فنستعين بذلك من سور القضية الجزئي في تدوينه الرمزي كما فعل فريجة او نعتبره من المعرفات وليس من المفاهيم المنطقية الاولية او اللامعرفة .

(٧٩)

ويربط فريجة بين سور القضية الكلي والشرطية والنفي ليبين امكانية التعبير عن المربع المنطقي الاوسطي باستخدام تدوينه الرمزي .

يحتوي المربع المنطقي الاوسطي على اربع قضايا رئيسية هي :-

١ . القضية الكلية الموجبة ويعبر عنها بالاسلوب الرمزي التقليدي : أ A ب .

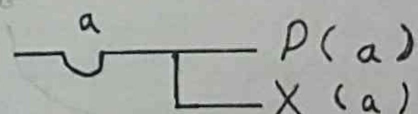
٢ . القضية الكلية السالبة ويعبر عنها بالاسلوب الرمزي التقليدي : أ E ب .

٣ . القضية الجزئية الموجبة ويعبر عنها بالاسلوب الرمزي التقليدي : أ I ب .

٤ . القضية الجزئية السالبة ويعبر عنها بالاسلوب الرمزي التقليدي : أ O ب .

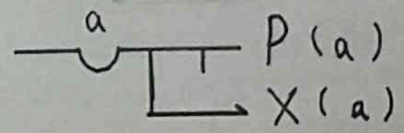
اما عند فريجة باسلوبه الرمزي فيعبر عنها بالصورة الآتية :-

أ A ب =



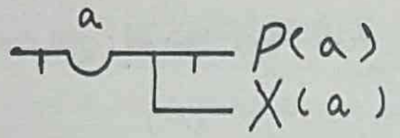
وبتعبيرنا الرمزي : (أ) (س أ ⟵ ص ا)

أ E ب =



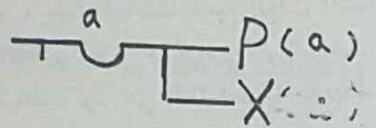
وبتعبيرنا الرمزي (أ) (س أ ⟵ ¬ ص أ)

أ I ب =



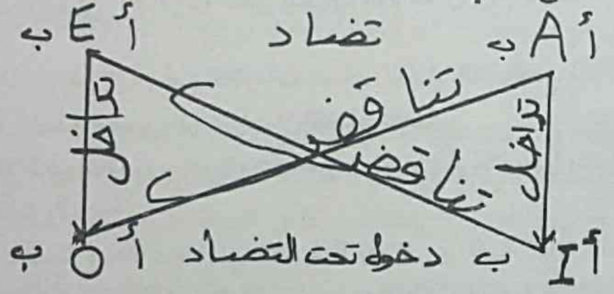
وبتعبيرنا الرمزي : ¬ [(أ) (س أ ⟵ ¬ ص أ]

أ O ب =

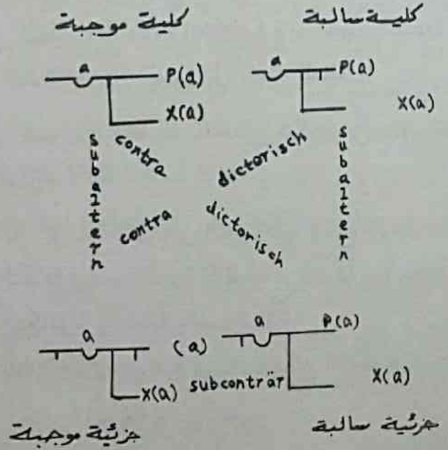


وبتعبيرنا الرمزي ¬ [(أ) (س أ ⟵ ص أ]

فاذا كان المربع المنطقي بالصورة الآتية :-



فان المربع المنطقي بالاسلوب الرمزي لفريجة يأخذ الصورة المنطقية الآتية :-



المبحث الثاني : لغة رسل – وايتهيد الرمزية

(٨٠)

استطاع رسل ووايتهيد تطوير طريقة منطقية في التدوين الرمزي هي بحث من اكثر اللغات الرمزية سعة وشمولا ، حيث احاطت بجميع التراث المنطقي واضافت اليه الشيء الكثير ، كما انها وفرت الادوات الرمزية لجميع فروع الرياضيات ، وذلك على اساس ان المنطق هو اساس الرياضيات ، وان على اللغة المنطقية الجديدة ان تحيط بجميع فروع الرياضيات. وعلى الرغم من تعقيد هذه اللغة قياسا بالتبسيط الذي اصاب عددا من اجزائها من قبل مناطقة آخرين ، فاننا سنحاول تقديم صورة صادقة عن اساسيات هذه اللغة لتكون مفيدة لمن يريد دراسة منطق رسل والافادة منه في فروع مختلفة من المعرفة.

لنبدأ اولا من غير اثارة بعض التعقيدات بحساب القضايا الذي نحتاج فيه الى مجموعة من الرموز في عملية التدوين الرمزي لصيغ القضايا المختلفة.

يختار رسل الاحرف التالية .... r و q و p كمتغيرات قضايا : ثم نختار رموزا مناسبة للروابط المنطقية وفقاً لما يأتي : –

اذا كانت P قضية صادقة ، فان نفي القضية P وهو $\sim P$ قضية كاذبة . اما القضية البدلية ، فانها تتكون من القضية P والقضية q ورابطة البدل الصورة الآتية : –

$P \vee q$ ويطلق على هذا الربط بالجمع المنطقي Logical Sum اما القضية العطفية او مايطلق عليها بالحاصل المنطقي Logical Product فانها تدون بالصورة الآتية : –

$P . q$ حيث تشير النقطة بين القضيتين الى رابطة العطف.

والقضية الشرطية فانها كسوابقها دالة ذات حدين تتكون من متغير قضايا p و q ورابطة الشرطية ، وتكتب بالصورة الآتية : –

$p \supset q$ وتقرأ : اذا p فان q ويمكن التعبير عنها بالنفي والبدل بالصورة الآتية : –

$P \vee q$ أما رابطة التكافؤ او المساواة بين القضايا ، فان لها رمزا جديداً يربط كل من p و q ، وتدوين الدالة التكافؤية للقضايا بالصورة الآتية : –

$p \equiv q$ ويقال عندئذ بان P تكافيء او تساوي q . ويمكن التعبير عنها منطقيا بالتعريف كما يأتي :

$$p \supset q . q \supset P .$$

ومن الملاحظ ان التدوين الرمزي لرسل – وايتهيد يعتمد على رموز للروابط المنطقية وهي : النفي والعطف والبدل والشرطية والتكافؤ، ولكنه في الوقت نفسه يختار من بينها النفي والبدل روابط غير معرفة Undefinabile او اللامعرفات ، بينما يتم تعريف كل من العطف والشرطية والتكافؤ. فالعطف يعبر عنه بواسطة النفي والبدل تعريفا وبالصورة الآتية : –

$\sim (\sim p \vee \sim q)$. والتعريفات في منطق اصول الرياضة لها دورها في أستخدام الروابط المعرفة وفي البراهين في منطق القضايا.

وهنا نجد اختلافات في التدوين الرمزي مع منطق فريجة ، ففي هذا المنطق لانجد رموزا خاصة للروابط المنطقية عدا النفي والشرطية على الرغم من امكانية التعبير عن بقية الروابط كما فعل فريجة بواسطتها ، فهو في ذلك اسقط في منطقة امكانية الافادة من التعريفات في الاستدلالات والبراهين.

ولكننا في الوقت نفسه نجد في التدوين الرمزي لرسل – وايتهيد اثاراً واضحة من لغة فريجة المنطقية ، فالرمز الذي يسبق القضية والذي يؤكد صدقها في منطق فريجة نجده بالصورة الآتية في منطق اصول الرياضة $\vdash$ كما في الصيغة الآتية :

$\vdash : p \vee q . \supset : q \vee P$ ، وان القضية الخالية من رمز التوكيد – Assertion – sign ليست مؤكدة ، وسنجد هذا الرمز قائما قبل جمع القضايا التي تعد في منطق اصول الرياضية بديهيات او قضايا اولية Primitive Propositions وفي منطق اصول الرياضة لاتستخدم الاقواس ، بل يستخدم بدلا منها نقاط توضع في امكنة مناسبة في الصيغة استنادا الى قواعد معينة في كيفية الاستعمال والمبدأ العام هو ان العدد الاكبر من النقاط يخدم او يؤشر القوس الخارجي ، وان العدد الاصغر من النقاط يؤشر القوس الداخلي وان القاعدة التامة لتحديد مجال النقاط كاقواس تقسم الى ثلاثة مجموعات ، فتحتوي المجموعة الاولى على النقاط التي تربط الروابط المنطقية.

والمجموعة الثانية تحتوي على النقاط التي تلي اقواس المتغير المقيد ، والمجموعة الثالثة تحتوي على النقاط التي تظهر بين القضايا لكي تؤشر الحاصل المنطقي. ولابد من الاشارة الى ان مجال الاقواس حسب قوة كل مجموعة ، فالمجموعة الاولى ذات قوة اكبر من المجموعة

الثانية والمجموعة الثانية ذات قوة اكبر من المجموعة الثالثة . ولتوضيح ماتقدم نطرح الامثلة الآتية : –

$p \vee q . \supset . q \vee p$ اما في حالة توكيد القضية فان الصورة تكون كما يأتي : –

$\vdash : p \vee q \supset . q \vee p$ حيث تشير النقطتان بعد رمز التوكيد الى ان جميع مايأتي بعدها مؤكد طالما لاتوجد نقاط اكثر منها تأتي بعدها . ويمكن ترجمتها بالاقواس كما يأتي : –

$$\vdash (p \vee q) \supset (q \vee p)$$

وفيما يلي بعض الصيغ المنطقية لتوضيح العلاقة بين النقاط والاقواس .

$p . \vee :: q . \vee .\therefore r : p \vee q$ وترجمتها بالاقواس كما يأتي : –

$$P \vee (q \vee (r . (p \vee q)))$$

والصيغة الاخرى المختارة هي : –

$p . p \supset q : \supset . q$ وترجمتها بالاقواس كما يأتي : –

$$p . (p \supset q) \supset q$$

والصيغة الأخرى المختارة هي :–

$$p \vee q . \supset .\therefore p . \vee . q \supset r : \supset . p \vee r$$

$$[(p \vee q) \supset ((p \vee q) \supset r] \supset (p \vee r)$$

ولكن ذلك لايعني ان لغة رسل – وايتهيد خالية تماما من الاقواس ، بل نجد لها استعمالات في منطقها وعند الضرورة ، ولتوضيح مانذهب اليه نختار الامثلة الآتية :–

اولا ؛ في حالة تعريف رابطة العطف بواسطة النفي والبدل كما في الصورة المنطقية الآتية :–

$$p . q . = . \sim (\sim p \vee \sim q) \quad (٢٢)$$

ثانيا : في حالة البديهية الخامسة في منطق القضايا كما في الصورة المنطقية الآتية :

$$\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r) \quad (٢٣)$$

ثالثا : في حالة قانون عدم التناقض كما في الصورة المنطقية الآتية : –

$$\vdash . \sim (p . \sim p) \quad (٢٤)$$

22) Principia Mathematica vol. 1 P : 12

23) Ibid., P : 13

24) Ibid., P : 13

رابعا : في حالة قانون النفي المزدوج كما في الصورة المنطقية الآتية : –

$$\vdash p \equiv \sim (\sim p) \quad (٢٥)$$

خامسا في حالة تعريف نفي الدالة الكلية ونفي الدالة الجزئية كما في الصورة المنطقية الآتية : –

$$\sim \{ (x) . \phi x \} . = . (\exists x) . \sim \phi x$$
$$\sim (\exists x) . \phi x \} . = . (x) . \sim \phi x \quad (٢٦)$$

ويذكر كتاب اصول الرياضة بعض القوانين البسيطة والمهمة اضافة الى البديهيات منها قانون الثالث المرفوع ، وتدوينه الرمزي كما يأتي : –

$$(٢٧) \quad \vdash . p \vee \sim p$$

وقانون التبديل بالنفي Transposition باشكاله المختلفة .

$$\vdash : p \supset q . \equiv . \sim q \supset p$$
$$\vdash : p \equiv q . \equiv \sim p \equiv \sim p$$

$$(٢٨) \quad \vdash .\therefore p . q . \supset . r : \equiv p . \sim r . \supset . \sim q$$

ويذكر الكتاب بالاضافة الى ذلك مجموعة اخرى من القوانين المهمة المعروفة ، ولكننا لسنا بصدد ذكرها جميعا لان مايهمنا هو اسلوب التدوين الرمزي .

(٨١)

وبالنسبة لحساب دالات القضايا ، فان الصيغة × هي دالة قضية تتحول الى قضية عندما يعطى للمتغير × معنى ثابتا ، وقد يعطى لـ × قيما كثيرة جدا تعين مجال الدالة فتحولها الى قضايا صادقة جميعا اوكاذبة جميعا او بعضها صادقة والاخر كاذب لذا فأن الحاجة هنا تقتضي ادخال رموز اولية للدلالة على الكلية والجزئية وهي في صورتها المنطقية كما يأتي : –

25) Ibid., P : 14

26) Ibid., P : 15

27) Ibid., P : 13

28) Ibid., p.14

١- $(x) . \phi x .$ ، ٢- $(\exists x) . \phi x .$

٣- $\sim (x) . \exists \phi x$ ،

٤- $\sim \{ (x) . \phi x \}$

ان الدالة الثانية تناقض الدالة الثالثة ، وان الدالة الاولى تناقض الدالة الرابعة وفيما يلي بعض التعريفات في مجال اسوار القضايا : -

$$\sim \{ (x) . \phi x \} . = . (\exists x) \sim \phi x \ \mathrm{Df}$$

$$\sim \{ (\exists x) . \phi x \} . = . (x) . \sim \phi x \ \mathrm{Df}$$

ويميز كتاب اصول الرياضة في تدوينه الرمزي بين المتغير الظاهر ApparentVariable الذي نطلق عليه في تدويننا الرمزي اسم المتغير المقيد ، والمتغير الحقيقي real variable الذي نطلق عليه في تدويننا الرمزي اسم المتغير الحر.

يظهر المتغير الظاهر مرتبطا بسور من اسوار القضايا فهو في الصيغة $(x) \ \phi x$ متغير ظاهر وكذلك في الصيغة $(\exists x) . \phi x$. اما مدى scope x فيعني الدالة التي جميع قيمها او بعضها مثبتة ، وان مدى x يتعين بواسطة عدد النقاط التي تلي (x) او $(\exists x)$ مثال ذلك : -

$$(x) : \phi x . \supset . \psi x$$

تعني ان ϕx تشترط دائما ψx

اما الصيغة $(x) : \phi x . \supset . \psi x$ فان x الاولى و x الثانية ليس بينها رابطة لان نقطة واحدة تلت (x) ، وهذا معناه ان مدى x محدود بالدالة ϕx فقط . ويفضل في هذه الحالة ان تكتب الصيغة بالصورة الآتية : -

$$(x) . \phi x . \supset . \psi y$$

ويختلف المتغير الحقيقي عن المتغير الظاهر بان ليس للاول صلة او علاقة بسور من اسوار القضايا . فاذا اردنا توكيد شيء يحتوي على متغير حقيقي مثال ذلك : -

$$\vdash . x = x$$

١

فاننا نؤكد اية قيمة لدالة القضية . وعندما نؤكد ماتحتوي على متغير ظاهر مثال ذلك : -

$$\vdash . (x) . . x = x$$
$$\vdash . (\exists x) . x = x$$

فاننا نؤكد في الصيغة الاولى جميع القيم . وفي الثانية بعض القيم لدالة القضية المطروحة ويشير الكتاب الى الصيغ المهمة جدا التي تربط بين المتغير الحقيقي والمتغير الظاهر ، وفيما يلي بعض منها : -

$$\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y$$

وتقرأ : مايقال على الكل يقال على اي شيء . وبعبارة اخرى : اذا كانت ϕx صادقة دائما ، فان ϕy صادقة

$$\vdash : \phi y . \supset . (\exists x) . \phi x$$

وتقرأ : اذا كانت ϕy صادقة فان ϕx صادقة بعض الاحيان

$$\vdash : (x) \phi x . \supset . (\ x) \phi x$$

بفضل الصيغة الاولى والصيغة الثانية على الصيغة السابقة . وتقرأ هذه ماهو صادق دائما صادق في بعض الاحيان .

ويتناول كتاب اصول الرياضة مفاهيم منطقية اخرى مثل الذاتية والفئة Class (المجموعة في مصطلحنا ، الا ان رسل لم يستعمل مصطلح set في منطقة) والعلاقة ، فيعبر عن قولنا بان دالة القضية x هي y بالصيغة الآتية : -

$$x = y$$

ولاهمية الذاتية ندرج بعض خواصها بالتدوين الرمزي لرسل-وايتهيد : -

$$\vdash . x = y$$
$$\vdash : x = y . \equiv . y = x$$
$$\vdash : x = y . y = z . \supset . x = z$$

تعبر الصيغة الاولى عن الخاصية الانعكاسية (او المنعكسة) ، على اساس ان العلاقة المنعكسة قائمة بين الحد وذاته ، سواء كانت كلية أو اينما كانت قائمة بين ذلك الحد وحد آخر.