وبالتعبير الرمزي نحصل على ما يأتي : –

أ ≡ ب ∧ ب ≡ جـ ←ـــ أ ≡ جـ

أ = ب ∧ ب = جـ ←ـــ أ = جـ

القانون الخامس : وهو القانون الذي ينص على انه اذا كانت أ هي جـ وب هي جـ فأن أ هي ب .

وبالتعبير الرمزي نحصل على مايأتي : –

أ ≡ جـ ∧ ب ≡ جـ ←ـــ أ ≡ ب

أ = جـ ∧ ب = جـ ←ـــ أ = ب

وبعبارة اخرى اذا كانت كل من أ ، ب هما جـ ، فان ج أ هي ب او اذا ساوى حدان حدا ثالثا ، فانهما متساويان .

(٦٧)

يدل ماورد في الفقرة السابقة ان المساواة العددية ليست الا حالة خاصة من الذاتية ، وذلك على اساس ان الذاتية تمثل المفهوم المنطقي العام ، وان المساواة العددية حالة خاصة لهذا المفهوم العام . واذا كانت الذاتية بهذه الصفة ، فان لها بالصورة التي طرحناها ضرورة منطقية للبرهان على كثير من الخصائص العددية المرتبطة بالمساواة العددية .

ونتناول الآن بالتدوين الرمزي بعض الخصائص المتصلة بعلاقة الاختلاف سواء كانت بمفردها أو مجتمعة مع علاقة المساواة العددية . وسنحاول في البداية تثبيت الخصائص بالصورة التي تفرضها علاقة الاختلاف من الزاوية المنطقية ، ثم نتناول الخصائص التي تربط علاقة الاختلاف بالمساواة العددية .

القانون الاول : أ تختلف عن ب اذا وفقط اذا كانت مجموع الصفات التي تحمل على أ لاتحمل على ب ، وبالعكس .

وبصيغة التدوين الرمزي نحصل على مايأتي : –

تعريف (٣٢)

أ ≠ ب = ت (س) [س أ ⟷ ¬ س ب] ∧ (س) [س ب ←ـــ ¬ س أ]

ومعناه : ان أ تختلف عن ب اذا وفقط اذا كانت كل س ، اذا كانت س تحمل على أ فان س لاتحمل على ب وكل س اذا كانت س تحمل على ب فان س لاتحمل على أ.

ويمكن تعريف علاقة الاختلاف بصورة ابسط ، وذلك عن طريق استخدام المساواة العددية والنفي وبالصورة الآتية : –

أ تختلف عن ب اذا وفقط اذا كانت أ لاتساوي ب وبالتعبير الرمزي نحصل على الصيغة الآتية : –

تعريف (٣٣)

أ ≠ ب = ت ¬ (أ = ب)

القانون الثاني : اذا كانت أ تختلف عن ب فان ب تختلف عن أ وبالتعبير الرمزي نحصل على الصيغة الآتية : –

أ ≠ ب ←ـــ ب ≠ أ

القانون الثالث : اذا كانت أ تساوي ب وكانت أ تختلف عن جـ فان ب تختلف عن جـ .

وبالتعبير الرمزي نحصل على الصيغة الآتية : –

أ = ب ∧ أ ≠ جـ ←ـــ ب ≠ جـ

القانون الرابع : اذا كانت أ تساوي ب ، وكانت ب تختلف عن جـ فان أ تختلف عن جـ .

وبالتعبير الرمزي نحصل على الصيغة الآتية : –

أ = ب ∧ ب ≠ جـ ←—— أ ≠ جـ

القانون الخامس : اذا كانت أ تساوي جـ ، وكانت ب تختلف عن جـ فان أ تختلف عن ب.

وبالتعبير الرمزي نحصل على الصيغة الآتية : –

أ = جـ ∧ ب ≠ جـ ←—— أ ≠ ب

ومن الضروري منطقيا ان نشير الى اختلاف جوهري بين الذاتية او المساواة العددية والاختلاف وهو بالصيغة الرمزي كما يأتي : –

يصدق القانون الآتي في علاقة الذاتية وهو : اذا كانت أ تساوي ب وكانت ب تساوي جـ فان أ تساوي جـ .

أ = ب ∧ ب = جـ ←—— أ = جـ

اما بالنسبة لعلاقة الاختلاف ، فان اختلاف أ عن ب واختلاف ب عن جـ لايلزم بالضرورة ان تكون أ مختلفة عن جـ ، وذلك لسبب بسيط هو ان القانون يصدق لجميع القيم التي تعطى للمتغيرات العددية ، في حين انه في هذه الحالة لايكون كذلك ، اذ من الممكن ان تكون أ مختلفة عن ب و ب مختلفة عن جـ ولكن أ لاتختلف عن جـ بل تساويها كما في المثال الآتي : –

اذا ٢ ≠ ٤ ∧ ٤ ≠ ١+١ فان ٢ لاتختلف عن ١+١ ، بل تساويها .

(٦٨)

والعلاقات بين الحدود مهمة في المنطق والرياضيات ، وغالباً مايدرك المرء اهميتها في نظرية الاعداد والهندسة ، فالمساواة والاختلاف كما بينا تقترن بقوانين لها دورها في المنطق والرياضيات فالى جانب هاتين العلاقتين نجد زوجا من العلاقات هما "اصغر من" و"اكبر من" فنرمز للاولى بالرمز < وللثانية بالرمز > ، فيكون لكل علاقة حدان ، وتظهر صيغة كل علاقة منها بالصورة الآتية : –

أ > ب [أ اصغر من ب]، أ < ب [أ اكبر من ب]

وتفهم هذه العلاقة في ضوء نظرية الاعداد بوضوح فنقول ان "أ اصغر من ب" اذا وفقط اذا كانت أ بحاجة الى مقدار لتكون مساوية لـ ب واذا افترضنا ان الحد جـ هو ذلك المقدار ، فعندئذ نحصل على الصيغة الآتية : –

تعريف (٣٤)

أ > ب = ت   أ + جـ = ب

وبالطريقة ذاتها يمكن فهم العلاقة "اكبر من" فنقول : ان أ أكبر من ب اذا وفقط اذا كانت ب بحاجة الى مقدار لتكون مساوية لـ أ . واذا افترضنا ان الحد جـ هو ذلك المقدار فعندئذ نحصل على الصيغة الآتية : –

تعريف (٣٥)

أ < ب = ت   أ = ب + جـ

ويشترط في الحالتين : حالة تعريف علاقة أصغر من "و" اكبر من " ان لايكون جـ يساوي صفرا" أي ان جـ ≠ .

ولهذه العلاقات قوانين اساسية أسوة بقوانين المساواة والاختلاف ، وفيما يلي مجموعة من هذه القوانين : –

القانون الاول : أ < ب = ب > أ

وتقرأ : أ اكبر من ب اذا وفقط اذا كانت ب أصغر من أ .

القانون الثاني : اذا كانت أ > ب وكانت ب > جـ فان أ > جـ وبالتدوين الرمزي نحصل على مايأتي : –

أ > ب ∧ ب > جـ ←—— أ > جـ

القانون الثالث : اذا كانت أ اكبر من ب و ب اكبر من أ فان أ تساوي ب

وبالتدوين الرمزي نحصل على مايأتي :-

أ > ب ∧ ب > أ ← أ = ب

القانون الرابع : اذا كانت أ اكبر من ب وب تساوي جـ فان أ اكبر من جـ اذا كانت أ = ب وب > جـ فان أ > جـ

ويمكن التعبير في الحالتين بالتدوين الرمزي كما يأتي :-

أ > ب ∧ ب = جـ ← أ > جـ

أ = ب ∧ ب > جـ ← أ > جـ

القانون الخامس : اذا كانت أ اكبر من ب و جـ اصغر من ب فان أ اكبر من جـ

وبالتدوين الرمزي تكون صورة القانون كما يأتي :-

أ > ب ∧ جـ > ب ← أ > جـ .

القانون السادس : اذا كانت أ اصغر من ب و ب تساوي جـ فان أ اصغر من جـ

وبالتدوين الرمزي تكون صورة القانون كما يأتي :-

أ > ب ∧ ب = جـ ← أ > جـ

(٦٩)

وتتناول كتب المنطق بالدراسة خصائص علاقات اخرى هي المنعكسة أو الانعكاسية Reflexive والعلاقة اللامنعكسة Irreflexive ، والعلاقة المتناظرة أو المتماثلة Symmetrical وغير المتناظرة Assymmetrical ، والعلاقة المتعدية Transitive ، وغير المتعدية Intransitive ، وعلينا ان نفهم ماتعنيه هذه الخصائص في ضوء بعض العلاقات من جهة وعلى اساس صلتها بالمجموعات من جهة اخرى.

ويجب ملاحظة ان هذه العلاقات هي دالات ، بحيث ان لكل دالة حدين فالعلاقة المنعكسة هي بلا شك دالة انعكاسية Reflexive Function وكذلك بقية العلاقات. وبناء على ذلك سنقوم بتحديد شروط هذه الدالات لتحديد معنى كل علاقة من العلاقات المتقدمة.

يقال ان علاقة منعكسة في المجموعة س اذا كان كل عنصر في المجموعة س له العلاقة مع نفسه . وبصيغة التدوين الرمزي :-

تعريف (٣٦)

العلاقة منعكسة اذا وفقط اذا حققت الشرط الآتي :-
{ أ : أ ∈ س ∧ أ R أ }
او بصيغة مبسطة (أ) [أ R أ]

تعريف (٣٧)

العلاقة غير منعكسة اذا وفقط اذا حققت الشرط الآتي :-
{ أ : أ ∈ س ∧ ¬ (أ R أ) }
أو بصيغة مبسطة : (أ) ¬ (أ R أ)

وعلاقة الذاتية مثل على العلاقة المنعكسة لانها تنص على ان أ = أ ، اما العلاقة غير المنعكسة فهي علاقة "اكبر من" مثال ذلك أن أ > ب ولكن ب ليست اكبر من أ .

تعريف (٣٨)

العلاقة ع متناظرة في المجموعة س اذا وفقط اذا كان لكل عنصرين مثل أ ، ب من المجموعة س يحقق الشرط الآتي :-
{ أ ، ب : أ ∈ س ∧ ب ∈ س ∧ [أ ع ب ← ب ع أ]
أو بصيغة بسيطة : (أ) (ب) [أ ع ب ← ب ع أ]

الهنا

تعريف (٣٩)

العلاقة ع غير متناظرة في المجموعة س اذا وفقط اذا كان لكل عنصرين مثل أ ، ب من المجموعة يحقق الشرط الآتي : –
{أ : ب أ ∋ س ∧ ب ∋ س ∧ [أ ع ب ⟵ ¬ (ب ع أ)] }
او بصيغة مبسطة : (أ) (ب) [أ ع ب ⟵ ¬ (ب ع أ)]

ومن الامثلة على العلاقة المتناظرة علاقة الذاتية نفسها ، ومن الشواهد على هذه العلاقة في الحياة اليومية علاقة "الاخوة" ، فنقول أن احمد أخ لمحمد ، وان محمد أخ لاحمد اما العلاقة غير المتناظرة فمن الامثلة عليها علاقة "الابوة" فنقول أن عادل أ ب لمسعود ولكن مسعود ليس أبا لعادل .
واخيرا نبحث علاقة التعدي من خلال صلتها بالمجموعات ، وطرحها بالصيغة المبسطة : –

تعريف (٤٠)

العلاقة ح متعدية في المجموعة س اذا وفقط اذا كان لكل من العناصر أ ، ب ، جـ في المجموعة س مايحقق الشرط الآتي : –
{ أ ، ب ، جـ : أ ∋ س ∧ ب ∋ س ∧ جـ ∋ س ∧ [أ ح ب ∧ ب ح جـ ⟵ أ ح جـ] }

او بصيغة مبسطة : (أ) (ب) (جـ) [أ ح ب ∧ ب ح جـ ⟵ أ ح جـ]
اما العلاقة غير المتعدية فيمكن تعريفها بالصورة الآتية : –

تعريف (٤١)

العلاقة ح غير متعدية في المجموعة س اذا وفقط اذا تحقق الشرط الآتي لكل ثلاثة عناصر أ ، ب ، جـ في المجموعة س : –
أ ، ب . جـ : أ ∋ س ∧ ب ∋ س ∧ جـ ∋ س ∧ [أ ح ب ∧ ب ح جـ ⟵ ¬ أ ح جـ]
أو بصيغة مبسطة : (أ) (ب) (جـ) [أ ح ب ∧ ب ح جـ ⟵ أ ح جـ]

ومن الامثلة على علاقة التعدي الذاتية وعلاقة "اكبر من "كما في قولنا :
اذا كان احمد اكبر من محمود ومحمود اكبر من محمد فان احمد اكبر من محمد اما علاقة اللاتعدي فمن الامثلة عليها علاقة ، ، الابوة" مثال ذلك : –
اذا كان أ أ ب ب و ب أ ب جـ فان أ ليس أباً لـ جـ .

المبحث الثاني :

العلاقات
(مفاهيم وقوانين)

(٧٠)

لاشك ان نظرية العلاقات واحدة من اكثر فروع المنطق الرياضي تطورا وانها تشكل في فروع المنطق المختلفة العمود الفقري ، اذ لاتخلو نظرية فرعية في المنطق من مفاهيم وقوانين العلاقات ، وان جزءا مهما فيها يؤلف مايعرف بحساب العلاقات ، وهو الحساب الذي يرتبط ارتباطا وثيقا بحساب المجموعات ، خاصة اذا عرفنا ان مجموعة من المفاهيم التي لابد من بحثها في حساب العلاقات مشابهة تماما لتلك التي بحثناها في حساب المجموعات والذي يهمنا في هذا المبحث هو ان ندرس العلاقات الاساسية في نظرية العلاقات ، وان نميز بوضوح بينها وبين المجموعات لكي لايقع الغموض والالتباس عند استعمال الرموز الخاصة بكل فرع منها .

بالاضافة الى ماذكرناه في المبحث السابق عن مفهوم الذاتية والاختلاف ، وماذكرناه عن علاقات بين المجموعات مثل علاقة عنصر بمجموعة ، وعلاقة مجموعة بمجموعة اخرى ، مثل الاحتواء والمساواة والفرق وغيرها . فان مجموعة اخرى من العلاقات تشكل اهمية خاصة بالنسبة لنظرية العلاقات ، وتشكل القوانين التي نستخدمها مكانة بارزة في علم المنطق .

اولا : نبدأ في اول الامر بالمفهوم العام للعلاقة ونختار لذلك رمزا للتعبير عن العلاقة الاثنينية ، فنقول : –

أ R ب   أن أ في علاقة مع ب

واذا اردنا القول ان أ ليست في علاقة مع ب ، فاننا نعبر عن ذلك بالتدوين الرمزي باستخدام النفي كما يأتي : –

—— (أ R ب)

وفي الحالتين يكون أ هو السابق على العلاقة ، ويكون ب هو اللاحق بالنسبة للعلاقة .

ثانيا : ونستطيع ان نستخدم مفهوما آخر في العلاقة يعتمد على ماسبق من تحليل ، فنقول ان مجموعة جميع السوابق بالنسبة للعلاقة R هي النطاق Domain ، وان مجموعة جميع اللواحق بالنسبة للعلاقة R هي معكوس النطاق Converse Domain

ولتوضيح ذلك نطرح المثال الآتي : –

اذا كانت R علاقة الاب وابنه ، فان نطاق R سيكون مجموعة الآباء ، كما ان معكوس النطاق للعلاقة R سيكون مجموعة الابناء وباستخدام التدوين الرمزي نعرف نطاق العلاقة كما يأتي : –

تعريف (٤٢)

نR = ت (أ) { (E ب) أR ب }   ومعناها : ان نطاق العلاقة R هو جميع الاشياء التي ترتبط بعلاقة مع شيء واحد في الاقل هو ب .

تعريف (٤٣)

R ن = ت (ب) { (E أ) أ R ب }   ومعناها : ان معكوس نطاق العلاقة R هو جميع الاشياء التي ترتبط بعلاقة مع شيء واحد في الاقل هو أ .

ثالثا : والمفهوم التالي في سلسلة هذه المفاهيم هو الحقل Field ، ويمكن تعريفه أو تحديد معناه باستخدام مفهومي معكوس النطاق والنطاق ، وبالشكل الآتي : –

تعريف (٤٤)

ل R =ت { ن R ب R ن }

الحقل هو حاصل جمع نطاق ومعكوس النطاق، ويظهر من التعريف ان الحقل للعلاقة R يمثل مجموعة اتحاد كل من مجموعة الاشياء التي تؤلف النطاق ومجموعة الاشياء التي تؤلف معكوس النطاق.

(٧١)

وفي مجال حساب العلاقات نجد مجموعة من المفاهيم المشابهة لتلك التي سبق استخدامها في حساب المجموعات، ولاجل التفريق بين هذين النوعين من المفاهيم سنستخدم رموزا مختلفة وذلك بان نضع نقطة مناسبة مع الرمز الذي يشير الى كونه جزءا من نظرية العلاقات، وفيما يلي مجموعة هذه المفاهيم.

اولا : توجد في حساب العلاقات علاقتان متميزتان هما العلاقة الشاملة Universal Relation، والتي نرمز لها بالرمز $\dot{\vee}$ والعلاقة الخالية أو العلاقة الصفر Null Relation، والتي نرمز لها بالرمز $\dot{\wedge}$ وتفهم العلاقة الشاملة على اساس انها علاقة قائمة بين أي عنصرين.

اما العلاقة الخالية فتفهم على اساس انها علاقة ليست قائمة بين أي شيئين، وباستخدام التدوين الرمزي نعرف هاتين العلاقتين كما يأتي : -

تعريف (٤٥)

$\dot{\vee}$ = ت (أ) (ب) [أ = أ $\wedge$ ب = ب]

ومعناها ؛ ان العلاقة الشاملة هي تلك التي تربط مجموعة كل العناصر أ، ومجموعة كل العناصر ب.

تعريف (٤٦)

$\dot{\wedge}$ = ت $\neg$ $\dot{\vee}$

ومعناها : ان العلاقة الخالية هي نقيض العلاقة الشاملة.

ثانيا : والمفهوم الآخر في سلسلة هذه المفاهيم هو اتخاذ علاقتين مثل R و S، وندون ذلك رمزيا كما يأتي : -

R $\dot{\cup}$ S وهذه العلاقة قائمة بين شيئين، اذا وفقط اذا كانت واحدة على الاقل من العلاقتين R و S قائمة بينهما.

تعريف (٤٧)

R $\dot{\cup}$ S =ت أ R ب $\vee$ أ S ب

ثالثا ؛ اما تقاطع علاقتين مثل R و S فيمكن التعبير عنه بالصورة الآتية : -

R $\dot{\cap}$ S

وهذه علاقة قائمة بين شيئين اذا وفقط اذا كانت العلاقة R والعلاقة S قائمة بينهما.

تعريف (٤٨)

R $\dot{\cap}$ S = ت أ R ب $\wedge$ أ S ب

رابعا : والمفهوم الآخر في حساب العلاقات هو الاحتواء الذي نرمز له مع علاقتين بالصيغة الآتية : -

R $\dot{\supset}$ S

تعريف (٤٩)

R ⊃ S = ت أ R ب ⟵ أ S ب
العلاقة R موجودة في العلاقة S اذا وفقط S اذا كانت R علاقة قائمة بين شيئين وكذلك العلاقة S

خامسا: وقد تكون العلاقة القائمة بين علاقتين علاقة مساواة وعندئذ يمكن تعريفها بالصورة الآتية: -

تعريف (٥٠)

R ≐ S = ت R ⊃ S ∧ S ⊃ R
العلاقة R تساوي العلاقة S اذا وفقط اذا S كانت العلاقة R موجودة في العلاقة S ، S والعلاقة S موجودة في العلاقة R .

سادسا: ومن المفاهيم المستخدمة في حساب العلاقات، ويشبه مفهوما آخر مفاهيم حساب المجموعات هو العلاقة المكملة Complement of Relation ، فنقول ان هذه العلاقة قائمة بين شيئين اذا وفقط اذا كانت العلاقة R لاتكون قائمة بين الشيئين. ويمكن توضيح التعريف بطريقة التدوين الرمزي بالصورة الآتية: -

تعريف (٥١)

العلاقة المكملة بين شيئين نعبر عنها أ $\bar{R}$ ب
العلاقة R لاتقوم بين شيئين نعبر عنها ¬ (أ R ب)
وبذلك نحصل على صيغة التعريف الآتية: -
أ $\dot{R}$ ب = ت ¬ (أ R ب)

وبالاضافة الى ماتقدم توجد مجموعة اخرى مهمة من المفاهيم في حساب العلاقات والتي تحتل مكانا بارزا في البحث المنطقي وهي كما يأتي: -

اولا: الحاصل النسبي لعلاقتين The Relative product of two Relations وهو المفهوم الذي يمكن تعريفه بالصورة الآتية: -

تعريف (٥٢)

الحاصل النسبي لعلاقتين R و S هو العلاقة التي تقوم بين أ وجـ عندما يكون هناك حد وسطي ب بحيث ان أ لها علاقة R لـ ب ، وب لها علاقة S لـ جـ .

ومن اجل تدوين هذا التعريف نتبع الخطوات الآتية: -
أ- الحاصل النسبي للعلاقتين يعبر عنه رمزيا R / S
ب- وعندئذ يكون التعريف بذكر الحدود الثلاثة: -
R / S = ت (أ) (جـ) [(E ب) أ R ب ∧ ب S جـ]

ثانيا: وللعلاقات صفات او خواص منطقية سبق بحثها في المبحث السابق (الفقرة ٧٠)، وغايتنا الآن تثبيت هذه الخواص من خلال الصلة التي تجمع العلاقات والمجموعات، وهذه الخواص هي: -

أ. يقال للعلاقة R انها منعكسة في المجموعة س اذا وفقط اذا كان كل عنصر من المجموعة س له علاقة R مع ذاته. ويقال للعلاقة R بانها غير منعكسة في المجموعة س اذا لم يوجد أي عنصر في المجموعة س له العلاقة R مع نفسه.

ب. يقال للعلاقة بانها متناظرة في المجموعة س، اذا وفقط اذا كان أي عنصرين مثل أ ، ب من المجموعة س له الخاصية الآتية: -
اذا كانت أ في علاقة مع ب فان ب في العلاقة ذاتها مع أ ويقال للعلاقة بانها غير متناظرة في المجموعة س ، اذا كان أي عنصرين مثل أ ، ب من المجموعة س له الخاصية الآتية: -
اذا كانت أ في علاقة مع ب ، فانه ليس لـ ب العلاقة ذاتها مع أ.

جـ - يقال للعلاقة بانها متعدية في المجموعة س ، اذا كان لأي من العناصر الثلاثة أ ، ب ، جـ من المجموعة س الخاصية الآتية ؛ -

اذا كانت أ في علاقة مع ب وكانت ب في العلاقة ذاتها مع جـ،فأن أ في نفس العلاقة مع جـ .

ويقال للعلاقة بانها غير متعدية في المجموعة س ، اذا كان لأي من العناصر الثلاثة من المجموعة س الخاصية الآتية :-

اذا كانت أ في علاقة مع ب وكانت ب في العلاقة ذاتها مع جـ ، فانه ليس لـ أ العلاقة ذاتها مع جـ .

(٧٣)

وبعد أن ذكرنا بعض المفاهيم الرئيسية لابد من ذكر بعض القوانين المنطقية المرتبطة بها استيفاء للبحث . وفيما يلي جملة من القوانين التي تؤلف حساب العلاقات : -

١ . بعض القوانين الخاصة بحساب العلاقات التي تتضمن النفي أو نفي العلاقة : -

[ب R أ —¬] (ب) (أ) = R —·—

معناها : ان نفي العلاقة R يعني ان مجموعة أ ومجموعة ب ليست في علاقة تربطها .

S —·— ∩̇ R = S —·— R

معناها ان العلاقة R لاترتبط بالعلاقة S ، اذا كانت العلاقة R لاتتقاطع مع العلاقة S ، او ان العلاقة R والعلاقة S لاتلتقيان أو لاترتبطان

(ب R أ) —¬ ←→ ب R —·— أ

معناها : - أن العنصر أ لايرتبط بعلاقة R مع ب اذا وفقط اذا كانت العلاقة بين أ و ب غير قائمة .

R ≠ R —·—

معناها أن نفي العلاقة R لايساوي العلاقة

R = (R —·—) —·—

معناها : ان نفي نفي العلاقة R يساوي R

R —·— ⊃̇ S —·— ←→ S ⊃̇ R -

S —·— ∪̇ R —·— ←→ (S ∩̇ R) —·—

S —·— ∩̇ R —·— ←→ (S ∪̇ R) —·—

(S —·— ∪̇ R —·—) —·— ←→ S ∩̇ R

٢ . بعض القوانين الخاصة بحساب العلاقات التي تستخدم الاتحاد

[ب S أ ∨ ب R أ] (ب) (أ) ←→ S ∪̇ R

أ (S ∪̇ R) ب ←→ أ R ب ∨ أ S ب

معناها : الاول : اتحاد مجموعتين R و S هو أن المجموعة أ والمجموعة ب ترتبط عناصرهما بالعلاقة R او العلاقة S .

الثاني : ان العنصرين أ ، ب يشتركان في العلاقتين المرتبطتين بالاتحاد اذا كانت أ في علاقة R مع ب ، وان أ في علاقة S مع ب كذلك .

R ←→ R ∪̇ R

معناه : ان اتحاذ العلاقة مع ذاتها هو العلاقة نفسها .

(T ∪̇ S) ∪̇ R ←→ T ∪̇ (S ∪̇ R)

هذا هو قانون الدمج للعلاقات : -

V̇ = R —·— ∪̇ R   معناه : ان اتحاد العلاقة مع مكملتها يساوي العلاقة الشاملة .

V̇ = V̇ ∪̇ R   معناه : ان اتحاد العلاقة مع العلاقة الشاملة يساوي ،علاقة شاملة .

R = Λ̇ ∪̇ R   معناه : ان اتحاد العلاقة مع العلاقة الخالية يساوي العلاقة R .

R ∪̇ S = S ∪̇ R   : القانون التبديلي .

٣- بعض القوانين الخاصة بحساب العلاقات التي تستخدم التقاطع .

$$[\text{ب}\,S\,\text{أ} \wedge \text{ب}\,R\,\text{أ}]\ (\text{ب})\ (\text{أ}) \longleftrightarrow S \dot{\cap} R$$

$$\text{ب}\,S\,\text{أ} \wedge \text{ب}\,R\,\text{أ} \longleftrightarrow \text{ب}\,(S \dot{\cap} R)\,\text{أ}$$

$$R \longleftrightarrow R \dot{\cap} R$$

$$(T \dot{\cap} S) \dot{\cap} R \longleftrightarrow T \dot{\cap} [S \dot{\cap} R)$$

$$(T \dot{\cup} S) \dot{\cap} R \longleftrightarrow (S \dot{\cap} R) \dot{\cup} (S \dot{\cap} R)$$

$$(T \dot{\cap} S) \dot{\cup} R \longleftrightarrow (S \dot{\cup} R) \dot{\cap} (S \dot{\cap} R)$$

٤- بعض القوانين الخاصة بحساب العلاقات التي تستخدم الاحتواء .

$$T \dot{\supset} R \longleftarrow T \dot{\supset} S \wedge S \dot{\supset} R$$

$$T = R \longleftarrow R \dot{\supset} S \wedge S \dot{\supset} R$$

$$T \dot{\cap} S \dot{\supset} R \longleftarrow T \dot{\supset} R \wedge S \dot{\supset} R$$

$$T \dot{\cap} \quad S \dot{\supset} T \dot{\cap} R \longleftarrow S \dot{\supset} R$$

$$T \dot{\cup} \quad S \dot{\supseteq} T \dot{\cup} R \longleftarrow S \dot{\supset} R$$

٥- بعض القوانين الخاصة بحساب العلاقات التي تستخدم العلاقة الخالية والعلاقة الشاملة .

$$\dot{V}\ \dot{-} = \dot{\Lambda}$$

$$\dot{V} \neq \dot{\Lambda}$$

$$\dot{V} = R\dot{-} \longleftrightarrow \dot{\Lambda} = R$$

$$\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda} \dot{\cap} R$$

$$R = \dot{V} \dot{\cap} R$$

المبحث الثالث ؛ امثلة وتطبيقات متنوعة :

(٧٤)

نتناول في هذا المبحث بعض مفاهيم العلاقات بالشرح والتوضيح من خلال مانختاره من امثلة وتطبيقات في مجال العلاقات ، كما نتوسع في بعض المسائل ذات العلاقة استكمالا لبعض جوانب البحث في نظرية العلاقات . وفيما يلي نختار مجموعة من الامثلة والتطبيقات على العلاقات : -

المثال الاول : العلاقة R تحتوي مجموعتين وقضية بالصورة الآتية : -

(أ) (ب) [أ R ب]

نعتبر السور الكلي (أ) والسور الكلي (ب) مجموعتين بينما تكون **أ R ب** صيغة او دالة قضية .

ولتوضيح هذه الدالة بالامثلة ندرج بعضا منها فيما يأتي : -

أ اكبر من ب ،

أ يقسم ب ،

أ زوج ب ،

أ والد ب ،

اذا كانت (أ) تؤلف مجموعة الرجال و (ب) تؤلف مجموعة النساء ، فان أ R ب تكون عندئذ علاقة الزوجية بمعنى ان أ زوج ب واذا كانت (أ) ، تؤلف مجموعة الطلبة ، و (ب) تؤلف مجموعة الاساتذة وكانت دالة القضية أ R ب تعني أ تقسم ب ، فان R ليست علاقة مادامت (أ تقسم ب) بالنسبة للمجموعتين لامعنى لها .

المثال الثاني : العلاقة R منعكسة اذا كل عنصر في المجموعة له علاقة مع ذاته الصيغة لهذه العلاقة نعبر عنها بدالة القضية أ R أ .

اذا افترضنا ان المجموعة تحتوي على المثلثات في الهندسة المستوية ، فان ، العلاقة R في المجموعة تعين من خلال دالة القضية "أ تتشابه مع ب" وتكون العلاقة منعكسة طالما ان كل مثلث متشابه مع نفسه .