س	ص	س − ص
١	١	٠
١	٠	١
٠	١	٠
٠	٠	٠

ونختار مثالا بسيطا لتوضيح هذه العملية :

س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١}

ص = {١ ، ٥ ، ١١}

س − ص = {٢ ، ٣ ، ٧}

ولمجموعة الفرق خواص منطقية تؤلف مجموعة من الصيغ في منطق المجموعات من خلال صلة العملية بالمجموعة الخالية والمجموعة الشاملة ومجموعة التقاطع والمجموعة المكملة ، وهي كما يأتي : −

س − س = ϕ

س − ص = ص − س

س − ϕ = س

ϕ − س = ϕ

س − ش = ϕ

س − ص = س ∩ صَ

(٦٠)

وتتساوى المجموعات فيما بينها على اساس ان جميع العناصر التي تنتمي الى احداها تنتمي كذلك الى الاخرى وبالعكس فيقال : تتساوى (المساواة Equality) المجموعة س مع المجموعة ص اذا وفقط اذا كانت العناصر التي تنتمي الى س هي نفسها التي تنتمي الى ص .

تعريف (٢٥)

س = ص = (أ) [أ ∈ س ⟷ أ ∈ ص]

واذا كانت س لاتساوي ص فمعنى ذلك : أن العناصر المنتمية الى المجموعة س ليست نفسها المنتمية الى المجموعة ص ونرمز الى عدم المساواة بين مجموعتيْن بالرمز ≠.

ولتوضيح التساوي واللاتساوي بين مجموعتين نأخذ الامثلة الاتية : −

س = {٣ ، ٥ ، ٧، ٩}

ص = {٩ ، ٥ ، ٣ ، ٧}

فمن الملاحظ ان العناصر نفسها في المجموعتين وان :

{٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} = {٩ ، ٥ ، ٣ ، ٧}

اما اللاتساوي فمثاله : −

س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧، ١١}

ص = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ١١}

فمن الملاحظ ان ٥ ∈ س ولاتنتمي الى ص (٥ ∉ ص) وكذلك : ٤ ∈ ص ، ٤ ∉ س وهذا معناه ان س ≠ ص .

(٦١)

والاحتواء Inclusion من عمليات المجموعات ، ويكون عادة بين مجموعتين أو اكثر. وهذا معناه : ان الاحتواء يتعين بالقول : بان المجموعة س محتواه في المجموعة ص ، وتكتب س ⊂ ص ، او ان س مجموعة جزئية من المجموعة ص اذا وفقط اذا كانت جميع العناصر التي تنتمي الى س تنتمي الى ص كذلك وليس العكس .

تعريف (٢٦)

س ⊂ ص = (أ) [أ ∈ س ← أ ∈ ص]

ويمكن تعريف التساوي بواسطة الاحتواء بالصورة الآتية : -

تعريف (٢٧)

س = ص = [س ⊇ ص ∧ ص ⊇ س]

ويمكن القول تبعا لذلك ان المجموعة س تساوي المجموعة ص ، اذا وفقط اذا كانت المجموعة س محتواه في المجموعة ص ، وكانت المجموعة ص محتواه في المجموعة س . وبعبارة اخرى :
تتساوى المجموعتان س ، ص اذا كانت العناصر التي تنتمي الى المجموعة س تنتمي الى المجموعة ص ، والعناصر التي تنتمي الى ص تنتمي الى س كذلك .

من الملاحظ الآن اننا في عملية الاحتواء استخدمنا رمزين مختلفين الاول هو ⊃ ، والثاني ⊇ ، وللتمييز بينهما الآن نقول ان الرمز الاول يشير الى احتواء حقيقي ، حيث أن مجموعة ماتكون محتواه في مجموعة اخرى من غير ان تكونا متساويتين ، بينما نقول ان الرمز الثاني يشير الى الاحتواء ، ولكنه لايشترط عدم التساوي بين المجموعتين.
وتكون المجموعة جزئية حقيقية Proper subset محتواه في مجموعة اخرى ، اذا كانت كل العناصر التي تنتمي الى المجموعة الجزئية تنتمي كذلك الى المجموعة الاخرى. وبذلك نستطيع تعريف الاحتواء الحقيقي بالصورة الآتية : -

تعريف (٢٨)

س ⊃ ص = [س ⊇ ص ∧ س ≠ ص]

ولكننا بشكل عام سنستخدم الرمز ⊃ للدلالة على الاحتواء ونكتفي به لدراسة خواصه. والعملية الاخرى في هذا السياق هي عدم الاحتواء او اللاحتواء. فاذا كانت لدينا مجموعة س واخرى مجموعة ص ، وكان في المجموعة س عنصر واحد في الاقل

لاينتمي الى المجموعة ، فاننا نقول ان المجموعة س غير محتواة في المجموعة ص . ونكتب بالرموز هذه العملية بالصورة الآتية : -

س ⊅ ص

تعريف (٢٩)

س ⊅ ص = (E أ) [أ ∈ س ∧ أ ∉ ص]

وللاحتواء خواصه المنطقية المهمة ، وهي عبارة عن قوانين تظهر علاقة الاحتواء مع المساواة والتقاطع والاتحاد والمجموعة الشاملة والمجموعة الخالية والمجموعة المكملة .

φ ⊃ س — المجموعة الخالية مجموعة جزئية من اية مجموعة
س ⊃ س
س ⊃ ص ∧ ص ⊃ ع ← س ⊃ ع
س ⊃ ص ∧ ص ⊃ س ← س = ص
س ∩ ص ⊃ س
س ⊃ ش
س ⊃ ص ∧ س ⊃ ع ← س ⊃ ص ∩ ع
س ⊃ ص ∧ ص ⊃ ع ← س ∪ ص ⊃ ع
س ⊃ ص ↔ س ∩ ص = س
س ⊃ ص ↔ س ∪ ص = ص

المبحث الثالث : تطبيقات متنوعة مختارة

(٦٢)

ان لنظرية المجموعات تطبيقات واسعة في العلوم المختلفة ، فلا يمكن الاستغناء عنها في فروع الرياضيات البحتة والفيزياء النظرية وعلم اللغة وغيرها من العلوم ، كما لايمكن التعبير عن كثير من الحقائق المنطقية الا من خلالها . وسنحاول في هذا المبحث ان نورد بعض التطبيقات البسيطة والمهمة للبرهنة على امكانية التدوين الرمزي لنظرية المجموعات في التعبير الدقيق عن الحقائق او المسائل المطروحة .

اولا/ نأخذ نظرية بيانو (Peano) التي تتألف من خمس بديهيات في الاعداد الطبيعية كامثلة ، لنجري عليها اسلوب التدوين الرمزي من خلال مفاهيم وعلاقات نظرية المجموعات .

البديهية الاولى : الصفر عدد طبيعي .
البديهية الثانية : التالي لاي عدد طبيعي عدد طبيعي كذلك .
البديهية الثالثة : التالي لاي عدد طبيعي لايكون صفرا ، او بتعبير آخر الصفر ليس تاليا لاي عدد طبيعي .

البديهية الرابعة : اذا كان لعددين نفس التالي ، فانهما عددان متساويان .
البديهية الخامسة : اذا كان الصفر منتميا الى صفة ، وينتمي اليها كل عدد طبيعي فان التالي ينتمي اليها ، كانت جميع الاعداد منتمية اليها .

التحليل والتدوين : —
البديهية الاولى : تتكون من مفهومين هما الصفر ، وعدد طبيعي الذي يعبر عنها مجموعة هي مجموعة الاعداد الطبيعية ، وان الصفر ليس الا عنصرا من عناصر الاعداد الطبيعية . وبذلك فان البديهية "الصفر عدد طبيعي" تعبر

عن انتماء الصفر الى مجموعة الاعداد الطبيعية . وهكذا نصوغ نتيجة التحليل بالتدوين الرمزي كما يأتي —

٥ ∈ ط [ط = مجموعة الاعداد الطبيعية]

البديهية الثانية : تعبر هذه البديهية عن حقيقة مهمة وبسيطة في سلسلة الاعداد الطبيعية وهي ان التالي لاي عدد طبيعي لابد ان يكون عددا طبيعيا كذلك . فاذا رمزنا لاي عدد بالرمز أ وللتالي بالرمز أ̄ ، والمجموعة الاعداد الطبيعية بالرمز ط ، وعلى اساس ان ذلك ينطبق على كل الاعداد (كل أ) ، فان تدوين البديهية رمزيا يأخذ الصورة الآتية : —

(أ) [أ ∈ ط ⟵ أ̄ ∈ ط]

البديهية الثالثة : تعبر هذه البديهية عن حقيقة بسيطة هي ان سلسلة الاعداد الطبيعية تبدأ من الصفر ، لذلك لايكون الصفر تاليا لاي عدد طبيعي . فاذا ، رمزنا بالرمز أ ولأي عدد وللتالي بالرمز أ̄ ، ولمجموعة الاعداد الطبيعية بالرمز ط ، علما بان ذلك ينطبق على كل الاعداد : (كل أ) ، اذ ان الصفر ليس تاليا لاي عدد طبيعي ، فان تدوين البديهية رمزيا يأخذ الصورة الآتية : —

(أ) [أ ∈ ط ⟵ أ̄ ≠ ٥]

البديهية الرابعة : تعبر هذه البديهية كذلك عن حقيقة في سلسلة الاعداد الطبيعية ، وهي اذا افترضنا وجود عددين طبيعيين متساويان فاذا رمزنا للعددين بالرمزين أ ، ب وبالتالي لكل منهما بالرمزين أ̄ ، ب̄ ، وللسور الكلي لكل عدد (أ) ، (ب) ، فان تدوين البديهية رمزيا يأخذ الصورة الآتية : —

(أ) (ب) [أ ∈ ط ∧ ب ∈ ط ∧ أ̄ = ب̄ ⟵ أ = ب]

البديهية الخامسة : ويطلق على هذه البديهية اسم الاستقراء الرياضي Mathematical Induction، وهي ذات اهمية كبيرة في البراهين الرياضية فاذا افترضنا اننا نريد البرهان على مبرهنة تعتمد على هذه البديهية فما علينا اولا الا أن نثبت ان الصفة او الخصيصة الرياضية في المبرهنة تحمل على الصفر ثم على كل عدد طبيعي نختاره والتالي من أي عدد لنصل في الاستنتاج بان الخصيصة تحمل على كل الاعداد. وفي سبيل تدوين هذه البديهية. رمزيا نرمز الى الصفة بالرمز ن مع الابقاء على الرموز التي سبق ان اختبرناها في تدوين البديهيات السابقة فتكون البديهية الخامسة بالصورة الرمزية الآتية :-

(ن) [0 ∈ ن ∧ (أ) (أ ∈ ط ∧ أ ∈ ن ⟵ أَ ∈ ن)
⟵ ط ⊆ ن]

(٦٣)

ثانيا : نأخذ بعض الامثلة من المنطق على سبيل التوضيح، والبرهنة على امكانية التدوين الرمزي لنظرية المجموعات :-

١. اذا كانت المجموعة س موجودة في المجموعة ص، وكانت المجموعة ص موجودة في المجموعة ع، فان المجموعة س موجودة في المجموعة ع.

في المثال ثلاث مجموعات هي س، ص، ع

س موجودة في ص : س ⊂ ص
ص موجودة في ع : ص ⊂ ع
س موجودة في ع : س ⊂ ع

ترتبط العبارة الاولى والثانية برابطة العطف. وترتبط المقدمتان والنتيجة بالشرطية وهكذا نحصل على الصيغة الآتية :-

س ⊂ ص ∧ ص ⊂ ع ⟵ س ⊂ ع

٢. يقال لفئتين مثل س، ص انهما متباعدتان، اذا كان تقاطعهما مجموعة خالية ومثال ذلك لغويا : لاواحد من العراقيين افريقي.

التحليل والتدوين :

في المثال مجموعة س ومجموعة ص، والتقاطع بينهما، والمجموعة الخالية. وفي سبيل تحقيق التدوين الرمزي لهذه العبارة نخطو كما يأتي :-

س ∩ ص   تقاطع س و ص
س ∩ ص = φ   ليس هناك عنصر مشترك بين المجموعتين المتقاطعتين.

وبعبارة اخرى. انهما متباعدتان.

٣. اذا لاواحد من العراقيين افريقي وكل بغدادي عراقي فان لاواحد من البغداديين افريقي. في هذا القياس قضية كلية سالبة وقضية كلية موجبة وقضية كلية سالبة. ومعنى ذلك ان القضية الكلية السالبة تعبر عن مجموعتين متباعدتين، بينما القضية الثانية تشير الى مجموعة جزئية هي "في مجموعة" "عراقي" وتكون النتيجة هي ان مجموعة بغدادي متباعدة عن مجموعة افريقي.

فاذا رمزنا الى مجموعة (العراقيين) بالرمز ي والى مجموعة افريقي بالرمز ص والى مجموعة بغدادي بالرمز ع، فاننا نحصل على الصيغة الآتية مع الاخذ بنظر الاعتبار رابطة العطف بين المقدمتين، وبين المقدمتين والنتيجة رابطة الشرطية :-

س ∩ ص = φ ∧ ع ⊂ س ⟵ ع ∩ ص φ

ويمكننا التعبير عن هذا القياس كاستنتاج كما يأتي :-

س ⊄ ص
ع ⊂ س

ع ⊄ ص

٤. اذا كل عراقي آسيوي وبعض العرب عراقيون فان بعض العرب آسيويون في هذا القياس وهي قضية كلية موجبة تعبر عن احتواء مجموعة في اخرى، وقضية ثانية جزئية موجبة تعبر عن تقاطع مجموعتين، ونتيجة تعبر عن تقاطع بين مجموعتين كذلك، لانها قضية جزئية موجبة فاذا رمزنا الى :-

عراقي = س، آسيوي = ص، العرب = ع

فان المقدمة الاولى تدون كما يأتي : س ⊃ ص ، أي ان س مجموعة جزئية في ص اما المقدمة الثانية فندونها بالصورة الآتية : –
ع ∩ س ، وتكون النتيجة ع ∩ ص. واذا اخذنا بنظر الاعتبار رابطة العطف بين المقدمتين ، ورابطة الشريطة بين المقدمتين والنتيجة نحصل على الصيغة الآتية : –

س ⊃ ص ∧ ع ∩ س ⟵ ع ∩ ص

او بالصيغة الاستنتاجية : –

س ⊃ ص
ع ∩ س

ع ∩ ص

(٦٤)

ثالثا : نختار من الهندسة امثلة للبرهنة على امكانية التدوين الرمزي على تحويل الاقوال الهندسية الى صيغ رمزية دقيقة.

١ . اذا تقاطع مستقيمان فان نقطة التقاطع تنتمي الى المستقيمين. ينطوي هذا القول على عدد من المفاهيم المهمة ندرجها بالتفصيل كما يأتي : –

أ– يفهم من المستقيم انه مجموعة نقاط ، وعليه فان المستقيم أ ب مجموعة نقاط ، وكذلك المستقيم جـ د هو مجموعة نقاط.
ب– ان نقطة التقاطع هي م.
جـ– ان م تنتمي الى مجموعة نقاط المستقيم أ ب كما تنتمي الى مجموعة نقاط المستقيم جـ د.
د– في المثال رابطة الشرطية ورابطة العطف.

وبناء على ذلك تتم صياغة هذا القول الهندسي باسلوب التدوين الرمزي بالصورة الآتية : –
أ ب ∩ جـ د=م (ان م هي نقطة تقاطع المستقيم أ ب وجـ د)

أ ب ∩ جـ د=م ⟵ م ∈ أ ب ∧ م ∈ جـ د

٢ . ونختار فيما يأتي مجموعة من الاقوال الهندسية ، ونختار لها الرموز المناسبة لتدوينها رمزيا.

أ– النقطة م خارج المستقيم أ ب
معنى ذلك باللغة المنطقية ان النقطة م لاتنتمي الى المستقيم المعلوم أ ب. وبناء على ذلك ندونها كما يأتي : –
م ∉ أ ب

ب– يحتوي المستوى س على عدد لامتناه من المستقيمات المتقاطعة في نقطة واحدة. يشتمل هذا القول على عدد من المفاهيم التي تحتاج الى رموز قبل صياغته رمزيا ، ومن هذه المفاهيم : المستقيمات المتقاطعة في نقطة واحدة ونعبر عنها بالصورة الآتية : –
(أ ب ∩ جـ د ∩ هـ و ∩ ح ط ∩ ....) = م
المستوى س الذي يحتوي جميع المستقيمات المتقاطعة في م ، نعبر عن ذلك كما يأتي : –
[(أ ب ∩ جـ د ∩ هـ و ∩ ح ط ∩ ....)] ⊃ س

جـ– اذا وازى مستقيم مستقيما آخر فلا توجد بينها نقطة تقاطع اولا يتقاطعان.
المستقيم أ ب يوازي المستقيم جـ د — أ ب // جـ د
المستقيم لايتقاطع مع المستقيم جـ د — أ ب ∩ جـ د =φ
وبذلك يمكن صياغة القول بالصورة الآتية : –
أ ب // جـ د ⟵ أ ب ∩ جـ د = φ

د– المستقيمات الموجودة في مستو هي اما متوازية اومتقاطعة او لاتتقاطع داخل المستوى لاجل صياغة هذا القول نرمز الى المستوى بالرمز س ، ونختار المستقيمين أ ب ، جـ د متوازيين او متقاطعين او غير متقاطعين ويتم التدوين بالصورة الآتية : –
أ ب // جـ د
أ ب ∩ جـ د
أ ب ∩ جـ د = φ

والصياغة العامة لهذا القول هي : –

أ ب ٨ جـ د ⊃ س ←—— (أ ب // جـ د) ٧ (أ ب ∩ جـ د)
٧ (أ ب ∩ جـ د = φ)

(٦٥)

واخيرا ارى ضرورة توضيح نقطة مهمة في الصلة بين نظرية المجموعات ودالات القضايا والقضايا لان في ذلك ماينفع في التدوين الرمزي والبرهان . وبناءا على ذلك سنطرح هذه الصلة على هيئة نقاط متتالية : –

اولا : تمثل نظرية القضايا القاعدة المنطقية الاستدلالية ، ولايمكن الاستغناء عنها في بناء الصيغ في نظرية الدالات ونظرية المجموعات ، كما ان البراهين الخاصة بنظرية دالات ، القضايا كثيرا ماتعتمد على قوانين منطقية من نظرية القضايا . ويجري الشيء نفسه بالنسبة للبراهين في نظرية المجموعات ، اذ تعتمد على القوانين المنطقية من نظرية القضايا .

ثانيا : ان تعريفات المفاهيم الاساسية لنظرية المجموعات استوجب الاعتماد على مفاهيم وصيغ ، من دالات القضايا ولايفوتنا ان نقول بان انتماء عنصر الى مجموعة لايعني اكثر من ان محمولا معينا يحمل على ذلك العنصر ثم اننا شاهدنا ان تعريفات مفاهيم المجموعات اعتمد كليا على مفاهيم نظرية الدالات ، فالاتحاد والتقاطع والاحتواء واللاأحتواء والمساواة واللامساواة والمجموعة الخالية والمجموعة الشاملة والمجموعة المكملة وغيرها اعتمدت في تعريفها على الدالات التي هي التراكيب المنطقية الداخلية للقضايا .

ثالثا : نظرية المجموعات تمثل دالات ذات حد واحد ، وهذا معناه : انه بالامكان رد ، المجموعات الى دالات القضايا او على الاقل توجيدهما معا ، وقد ذهب الى ذلك بعض المناطقة وعلى رأسهم ديفيد هلبرت [١] . توحيدهما

1) Hilber, D & Ackermann, W., Grundzuge der theoretischenLogit PP: 40 – 44

ومن المعروف بان ابرز مفهوم في نظرية المجموعات هو "الانتماء" على اساس انتماء عنصر او عناصر الى مجموعة ، ويمكن تعريف هذا الانتماء بدالة قضية ذات حد واحد وكما يأتي : –

أ ∍ س = س أ (١٥)

رابعا : ان جداول الانتماء في نظرية المجموعات لمفاهيم : الاتحاد والتقاطع والمجموعة المكملة وغيرها تناظر جداول القيم في نظرية القضايا واذا ماطرحنا الشرطية مكان الاحتواء تحولت قوانين الاحتواء للمجموعات الى قوانين منطقية ، وكذلك اذا ما طرحنا العطف والبدل والنفي مكان التقاطع والبدل والنفي الموجود في المكلة ، تحولت جميع القوانين الخاصة بالتقاطع والبدل وغيرهما الى قوانين منطقية من القضايا ودالات القضايا .

ولاجل توضيح هذه النقاط بالتفصيل نلجأ الى الامثلة : –

المثال الاول :

ق ←— ل ←→ ¬ ق ٧ ل نظرية القضايا

(أ) [س أ ←— ص أ ←→ ¬ س أ ٧ ص أ] دالات قضايا

(أ) [أ ∋ س ←— أ ∋ ص ←→ ¬ (أ ∋ س) ٧ أ ∋ص] أو

س ⊃ ص ≡ سَ ∪ ص نظرية المجموعات

المثال الثاني :

ق ٧ ¬ ق

(أ) [س أ ٧ ¬ س أ]

(أ) [أ ∋ س ٧ ¬ (أ ∋ س)

س ∪ سَ

ق ←— ل ٧ ق

(أ) [س أ ←— ص أ ٧ س أ]

(أ) [أ ∋ س ←— أ ∋ ص ٧ أ ∋ س]

س ⊃ ص ∪ س

10) Reichenbach, H, Elements of Logic P 192.

وفي مجال البراهين في نظرية المجموعات نطرح الامثلة الآتية : -

المثال الاول : -

س ∪ ص = ص ∪ س

البرهان : -

س ∪ ص = {أ : أ ∈ س ∨ أ ∈ ص}　　　تعريف الاتحاد

بتطبيق القانون المنطقي

ق ∨ ل ⟷ ل ∨ ق

نحصل على :

= {أ : أ ∈ ص ∨ أ ∈ س}

= ص ∪ س

تعريف الاتحاد

المثال الثاني ؛ -

(س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع)

البرهان : -

= {أ : أ ∈ (س ∪ ص) ∨ أ ∈ ع} تعريف الاتحاد

= {أ : (أ ∈ س ∨ أ ∈ ص) ∨ أ ∈ ع}　　　تعريف الاتحاد

بتطبيق القانون المنطقي

(ق ∨ ل) ∨ م ⟷ ق ∨ (ل ∨ م)

= {أ : أ ∈ س ∨ (أ ∈ ص ∨ أ ∈ ع)}

= س ∪ (ص ∪ ع)　　　تعريف الاتحاد

المثال الثالث :

س ⊂ ص ∧ ص ⊂ ع ← س ⊂ ع

البرهان :

س ⊂ ص = (أ) [أ ∈ س ← أ ∈ ص]

ص ⊂ ع = (أ) [أ ∈ ص ← أ ∈ ع]

وبنطبق القانون المنطقي:

(ق ← ل ∧ ل ← م) (ق ← م)

نحصل على مايأتي : -

(أ) [أ ∈ س ← أ ∈ ع]

وحسب تعريف الاحتواء نحصل على النتيجة : -

س ⊂ ع

المثال الرابع ؛

س ∩ ص ⊂ س

البرهان : -

س ∩ ص = {أ : أ ∈ س ∧ أ ∈ ص}　　　تعريف التقاطع

وينطبق القانون المنطقي :

ق ∧ ل ← ق

نحصل على : -

{أ : أ ∈ س}

= س

الفصل الرابع

نظرية العلاقات

(حساب العلاقات)

المبحث الاول : العلاقات بين الحدود

(٦٦)

ان من العلاقات المهمة في المنطق التي نواجهها هي علاقة الذاتية Identity بين حدين أو أسمين ، ونرمز لها عادة بالرمز ≡ فنقول :

أن أ ≡ أ بمعنى ان للحد أ نفس المحتوى للحد أ وهذه العلاقة لاتضيف الى معرفتنا شيئا ، فهي تقتصر على توكيد ان المحتوى واحد للرمز نفسه عند ارتباطه بالذاتية . وغالبا ما يقال ان الشيء هو هو كتعبير عن علاقة الذاتية ولكن الى جانب هذه الصيغة نجد صيغة اخرى للذاتية تضيف شيئاً جديداً الى معرفتنا وهي : -

ان أ ≡ ب بمعنى ان للحد أ الذي يختلف في الاسم عن الحد ب نفس المحتوى للحد ب .

ومثل هذه العلاقة مهمة جدا في المنطق والرياضيات على حد سواء . وقد يكون المحتوى معنى او دلالة شيئية ، ولكننا ان اخذنا بتحليل فريجة للمعنى والدلالة [11] ، فان الذاتية تصبح علاقة بين اسمين اورمزين اوحدين لهما نفس الدلالة مع الاختلاف في المعنى او الفكرة . فاذا قلنا ان " نجم الصباح هو نجم المساء " فان المعنى او المحتوى الفكري لنجم الصباح يشير الى نجم يظهر في الصباح ، وان المعنى او المحتوى الفكري لنجم المساء يشير الى نجم يظهر في المساء ، وبذلك يختلف الاسمان في المعنى ، الا أن الدلالة او

11) Frege, G, Uber Sinn und Bedeutung

الشيء الذي يشير اليها الاسمان واحد، فما يدل عليه الاسم "نجم الصباح" هو جرم سماوي يظهر في القبة السماوية، وانه نفس الجرم السماوي الذي يشير اليه الأسم "نجم المساء".

والصورة الاخرى للذاتية بين الحدود في الرياضيات هي المساواة العددية، والتي نرمز لها بالرمز = ، وقد تكون بين حدين من الاعداد متساويين مثال ذلك ان أ=أ و أن ٣=٣ وقد تكون بين حدين من الاعداد مختلفين في الرمز متساويان في الدلالة مثال ذلك : ٢+٢=٤ تعبيرا عن علاقة المساواة بين أ، ب : أ= ب والى جانب هذه العلاقة نجد كذلك علاقة اللامساواة أو الاختلاف والتي نعبر عنها بالصورة الرمزية الآتية :-

أ ≠ ب بمعنى : ان أ ليست ب أو أن أ تختلف عن ب.

وللذاتية قوانين اساسية تدخل في مجال التدوين الرمزي، وهي بلا شك قوانين منطقية مرتبطة بمفهوم الذاتية.

القانون الاول : أ ≡ ب اذا وفقط اذا كانت ل أ كل صفة ل ب، وان ل ب كل صفة ل أ.

وبالتعبير الرمزي نحصل على الصيغة الآتية :-

تعريف (٣٠)

أ ≡ ب = ن (س) [س أ ⟷ س ب]

ويمكن قراءة هذا القانون على اساس انه تعريف للذاتية فنقول أن أ هي ب اذا وفقط اذا كانت كل س أو كل صفة تحمل على أ كذلك على ب وبالعكس. ويعود الفضل في صياغة هذا القانون الى لايبنتز، لذلك نجد بعض الكتب المنطقية تقرنه دائما باسم لايبنتز.

ويمكن استنتاج خاصية منطقية مهمة في الرياضيات فيما يخص الذاتية في حالة النظر اليها كمساواة في معادلة، وهذه الخاصية

هي : انه بالامكان ابدال أ مكان ب في كل صيغة تظهر فيها ب ، كما يمكن ابدال ب مكان أ في كل صيغة تظهر فيها أ.

القانون الثاني : ان كل شيء هو ذاته : أ ≡ أ، أ=أ

وعندئذ يمكن الحصول على مايأتي ينطبق تعريف لايبنتز :-

أ ≡ أ اذا وفقط اذا كان ل أ كل صفة ل أ وبالعكس.

وبالتعبير الرمزي نحصل على الصيغة الآتية :-

تعريف (٣١)

أ ≡ أ = ن (س) [س أ ⟷ س أ]

ويمكن قراءة هذا القانون بالصورة الآتية :-

أ هي أ اذا وفقط اذا كانت كل س، س تحمل على أ وتحمل كذلك على ذاتها.

ويمكن ملاحظة ان هذا القانون مشتق من قانون لايبنتز الاول، وذلك على اساس ابدال ب بالرمز أ، ليكون :-

أ≡أ، أ=أ

القانون الثالث : وهو القانون الذي ينص على انه اذا كانت أ هي ب فان ب هي أ. وبالتعبير الرمزي نحصل على مايأتي :-

أ ≡ ب ⟵ ب ≡ أ

أ = ب ⟵ ب = أ

القانون الرابع : وهو القانون الذي ينص على انه اذا كانت أ هي ب وب هي ج، فأن أ هي ج.