المثال الحادي عشر

قياس Ferio

ب E أ ٨ جـ I ب ⟵ جـ O أ

ونختار المثال اللغوي الآتي : -

اذا لاواحد من الملحدين مؤمن وبعض الفلاسفة ملحدون فان بعض الفلاسفة ليسوا مؤمنين.

التحليل والتدوين : -

اذا لاواحد من الملحدين مؤمن (ب E أ) = (أ) (س أ ⟵ ¬ ص أ)

وبعض الفلاسفة ملحدون (جـ I ب) = (E أ) ف (ف أ ٨ س أ)

فان بعض الفلاسفة ليسوا مؤمنين (جـ O أ) = (E أ) (ف أ ٨ ¬ ص أ)

وقد تم اختيار الرموز كما سبق على النحو الآتي : -

سَ أ = أ ملحد، ص أ = أ مؤمن، ف أ = أ فيلسوف.

وذلك على اساس تحليل القضايا : -

لاواحد من الملحدين مؤمن = (كل أ) اذا أ ملحد فان أ ليس مؤمنا.

بعض الفلاسفة ليسوا مؤمنين = (بعض أ) أ فيلسوف و أ ليس مؤمنا.

وهكذا نحصل على الصيغة النهائية لقياس Ferio بعض اضافة العطف والشرطية.

(E أ) (س أ ⟵ ص أ) ٨ (E أ) (ف أ ٨ ص أ) ⟵ (E أ) (ف أ ٨ ¬ ص أ)

الفصل الثالث

نظرية المجموعات

(حساب الفئات)

المبحث الاول : المجموعة

(٥٣)

الفئة Class مفهوم اساس ورد في كتابات علماء المنطق [٨]، والمجموعة Set مفهوم مماثل ورد في كتابات علماء الرياضيات [٩]، وهذا امر يدل بوضوح ان هذا المفهوم من المفاهيم المنطقية. الرياضية، وان الابحاث والدراسات التي تناولته بالبحث منطقية ورياضية. ولكن نظرا لشيوع استعمال مفهوم "المجموعة" بسبب التوسع الكبير في تدريس مادة "الرياضيات المعاصرة" واقتصار مفهوم "الفئة على التدريس الجامعي في اقسام الفلسفة وجدنا انفسنا امام اختيار مفهوم "المجموعة" بمعنى "الفئة" لتعم الفائدة من جهة ونزيل اللبس والابهام من جهة اخرى.

لايمكن ان يعد كل تجمع يتألف من اشياء متفرقة مجموعة، فالكراسي والمنضدة والسبورة والطبلة لايؤلفون مجموعة، اذ أن الضرورة المنطقية توجب تحقيق وجهين في كل مجموعة، فمن الضروري ان تكون الاشياء في المجموعة مشتركة في صفة معلومة معروفة واحدة. وهذا معناه اننا ننظر الى المجموعة من جهة:

---

٨) ورد هذا التعبير او المصطلح في كتابات جوتلوب فريجة المنطقية، كما استخدمه براتراندرسل في مؤلفاته المنطقية والفلسفية، واستعمله فتجنشتاين كذلك في رسالته الفلسفية - المنطقية، واعتمد على المصطلح ديفيد هلبرت في مؤلفاته المنطقية والرياضية. ويمكن القول ان هذا المصطلح اصبح شائعاً في كتابات علماء المنطق وبعض الفلاسفة وعلماء الرياضيات.

٩) ورد مصطلح "المجموعة" في كتابات عدد غير قليل من علماء الرياضيات والمنطق واصبح اكثر شيوعا عندما تقرر اعادة النظر في الرياضيات واعادة بناء فروعها مقامة على اساس نظرية المجموعات.

أ) العناصر Elements التي تحتويها ، ومن جهة : -

ب) الصفة Property او الصفات التي تحمل على جميع الافراد او العناصر.

ولاشك ان هذا التقسيم يماثل ماعرف في المنطق من أن الاسم له مفهوم هو Connotation هو المعنى او الصفة او الفكرة ، وله ماصدق Denotation وهو مجموع الافراد الذين تنطبق عليهم الصفة اويحمل عليهم المفهوم . وبناء على ذلك يمكن ان يكون للاسم مفهوما وماصدقا ، اومفهوما من غير ان ينطبق على افراد ، فيكون الماصدق خاليا ، او أن يكون الماصدق مجموعة متناهية او لامتناهية .

ولتوضيح اهمية العناصر والصفة في المجموعة نطرح الامثلة الآتية : -

مجموعة المنتخب العراقي لكرة السلة .

مجموعة الكتب الفلسفية في مكتبة قسم الفلسفة .

مجموعة الاعداد الطبيعية .

مجموعة الاعداد الزوجية .

مجموعة الاعداد الفردية .

مجموعة الانهار في الجمهورية العراقية .

مجموعة العواصم في الاقطار العربية .

مجموعة سكان الكرة الارضية .

مجموعة اساتذة كلية الاداب .

مجموعة عمداء مجلس جامعة بغداد .

ويجب ملاحظة حقيقة موضوعية هي ان بعض الاسماء لاتكون مجموعات حقيقية وان بدت في ظاهرها غير ذلك ، مثال قولنا : -

الاعداد الجميلة .

الناس الابرار في مجتمعنا .

مجموعة الكتب المفيدة .

مثل هذه الامثلة صعبة ، بل مستحيلة التحديد ، اذ كيف نميز بين الاعداد الجميلة وغير الجميلة ؟ وهل هناك اعداد نطلق عليها جميلة واخرى ليست جميلة ؟ وماهو مقياس

الجمال بالنسبة للاعداد ؟ اذ من الممكن بان مايراه المرء جميلا يراه الاخر غير جميل . فالصفات الذاتية غير الموضوعية لايمكن ان تكون صفة مشتركة للعناصر لعدم قدرتنا على تحديدها بدقة موضوعية . ومايصدق على هذا المثال يصدق كذلك على الامثلة الاخرى ، اذ كيف نؤلف مجموعة حقيقية من الناس الابرار في مجتمعنا ؟ وكيف نختار الكتب المفيدة ؟ علما ان بين الناس اختلافات كبيرة في تعيين وفهم المقصود بالناس الابرار وبالكتب المفيدة .

نتعامل في نظرية المجموعات مع المجموعات الحقيقية - الموضوعية المعرفة - ، ولانهتم بغيرها من المجموعات ذات الصفات الذاتية التي تعتمد بالدرجة الاولى على فهم كل فرد وذوقه وشعوره وتصوره وغير ذلك .

(٥٤)

ان اول خطوة نخطوها في التدوين الرمزي للمجموعات هي في أختيار الحروف الأبجدية فنقول ان الحروف س ، ص ، ع ، م ، ن ، رموز تشير الى مجموعات ، وان الحروف أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ... تشير الى عناصر داخلة في المجموعة ، وقد تكون عناصر المجموعة أعداداً أو أفراداً أو أنهاراً أو عواصم أو غير ذلك .

تتعين المجموعة بعناصرها التي تشترك في صفة واحدة ، فيقال أن الصفة تحمل على كل عنصر من عناصرها . ويشترط أن تكون العناصر متمايزة ، كما يشترط أن تكون الصفة المشتركة موضوعية ، بحيث يتفق عليها من الجميع . ويمكن تعيين المجموعة بالصورة التالية : -

الاولى : عن طريق تعداد العناصر المنتمية اليها ، وغالباً مايكون ذلك بالنسبة للمجموعة المحدودة أو النهائية Finite Set .

الثانية : عن طريق الصفة المشتركة التي تنطوي تحتها مجموعة من العناصر التي قد تكون محدودة أو غير محدودة أو لانهائية

يطلق على الاولى كطريقة في تعيين المجموعة أسم "القائمة" Tabular Form أو تعيين المجموعة بالقائمة مثال ذلك أن تعيين مجموعة العواصم العربية التي تقع في الشمال الافريقي .

ويطلق على الطريقة الثانية في تعيين المجموعة بواسطة الصفة المشتركة أسم الصفة المشتركة مثال ذلك أن نعين الاعدادالزوجية من الاعداد الطبيعية . والطريقة الثانية هي الطريقة الجديدة في تعيين المجموعة ، لانها قابلة التطبيق في حالة كون المجموعة محدودة او غير محدودة بالأضافة انها قابلة التطبيق في حالة تعيين المجموعة القائمة . ولأسلوب التدوين الرمزي المتبع في الطريقة الثانية صيغته الآتية : –
اذا كانت س مجموعة ، وكان المطلوب تعيين عناصرها من خلال الصفة المشتركة ، فاننا نقول : – كل أ بحيث أن أ عدد زوجي موجب .

س = { أ : أ عدد زوجي موجب }

ان الأقواس { } خاصة بالمجموعة ، وان أ عدد زوجي موجب دالة قضية لها متغير واحد . والنقطتان : للدلالة على القول "بحيث أن" وان أ الذي يسبق النقطتين هو كم الدالة أو سورها . ولتوضيح ما نذهب اليه اكثر نحقق ما ورد في المجموعة س بالصورة الآتية : –

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، .... }.

وذلك على اساس ان المجموعة بين القوسين تمثل جميع الاعداد الزوجية الموجبة ، ولما كانت هذه المجموعة لانهائية ، تركنا مابعد العدد الزوجي ١٢ نقاط للدلالة على استمرارية الاعداد الزوجية من خلال اضافة العدد ٢ الى العدد الذي قبله .
وليس من الضروري ان تحتوي المجموعة على عناصر، وعندئذ يقال في هذه الحالة ان المجموعة خالية ، وذلك لكونها فارغة لايوجد أي عنصر ينتمي اليها ، مثال ذلك : الطيور، التي لاتتنفس الهواء ، ويعبر عن المجموعة الخالية Empty Set بالرمز ϕ أو A كما اعتاد المناطقة على ذلك. ويمكن تعريف المجموعة اولا تعريفا توضيحيا ، ثم تعريف المجموعة الخالية باسلوب التدوين الرمزي ثانيا .

تعريف (١٨)

المجموعة = تجمع من عناصر أو افراد متمايزين وقد عرفوا تعريفا جيداً .

تعريف (١٩)

ϕ = أ : أ $\neq$ أ

وبعبارة اخرى : أن المجموعة الخالية هي مجموعة العناصر التي فيها كل عنصر يختلف عن ذاته وهذا معناه ان المجموعة الخالية خالية من العناصر لانه لابد ان يكون كل عنصر هو ذاته ، ولايوجد عضو واحد يختلف عن ذاته . كما يمكن القول بان الصيغة أ $\neq$ أ متناقضة ، وان أي تناقض لايمكن ان يكون غير مجموعة خالية .

(٥٥)

وعلى نقيض المجموعة الخالية نجد مجموعة اخرى تحتوي على العناصر جميعها ، وتسمى عادة بالمجموعة الشاملة او المجموعة الكلية Universal Set وتعتبر جميع المجموعات بالنسبة للمجموعة الشاملة مجموعات جزئية ، مثال ذلك : مجموعة الاعداد الطبيعية هي مجموعة شاملة ، وان مجموعة الاعداد الفردية هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة ، كما ان المجموعة التي تحتوي على الاعداد الزوجية هي كذلك مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة . ويترتب على ذلك ماياتي : –

ان جميع عناصر المجموعات الجزئية هي عناصر تنتمي الى المجموعة الشاملة . ولتوضيح ذلك نبين ماياتي : –
المجموعة الشاملة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ...... } هي مجموعة الاعداد الطبيعية .
مجموعة الاعداد الفردية = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ..... }
مجموعة الاعداد الزوجية = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ..... }

مجموعة الأعداد الأولية = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ... }
ويعبر عن المجموعة الشاملة بالحرف ش أو بالرمز ٧ كما أعتاد المناطقة على ذلك :
ويمكن تعريف المجموعة الشاملة بالشكل الآتي : –

تعريف (٢٠)

ش = { أ : أ = أ }

وبعبارة أخرى : ان المجموعة الشاملة هي مجموعة العناصر التي فيها كل عنصر هو ذاته فهي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر.

ومن الملاحظ ان بين المجموعة الخالية والمجموعة الشاملة تناقض يمكن ان يرفع بنفي احداهما ليتم التساوي المنطقي بين المجموعتين. كما يلاحظ كذلك ان المجموعة الشاملة قد تم تعريفها من خلال الذاتية على أساس صدقها الدائم، بينما تم تعريف المجموعة الخالية من خلال نفي الذاتية "أ≠أ" وهذا بلاشك يعبر عن الكذب الدائم.

ينطوي هذا التحليل على حقيقة منطقية مهمة هي ان لعالم المنطق حرية الأختيار في تعريف المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية، وأختيار صيغة صادقة دائماً للتعبير عن المجموعة الشاملة، واختيار صيغة كاذبة دائماً للتعبير عن المجموعة الخالية.

ومن الملاحظات المهمة التي يجب معرفتها في نظرية المجموعات ما يأتي : -

أولاً : ان بين المجموعة وعناصرها علاقة انتماء عضوي Set membership ، فيقال مثلاً ان العنصر أ ينتمي الى المجموعة س. ويعبر عن هذا الأنتماء بالرمز ∈ ، فتكون العلاقة بالصورة الآتية : -

أ ∈ س وتقرأ: تنتمي الى المجموعة س

أ ∉ س وتقرأ: ألاتنتمي الى المجموعة س

ثانياً : ان تكرار عنصر او اكثر في مجموعة ما لا يؤثر في المجموعة، اذ لايحتسب التكرار للعناصر لاية دلالة منطقية او رياضية. ولتوضيح ما نذهب اليه نضرب الأمثلة الآتية : -

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٥ }

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

المجموعتان س ، س لاتختلفان على الرغم من تكرار بعض أ عناصر س ، وبالتالي فهما متساويتان في عدد العناصر المنتمية لكل مجموعة منها.

ثالثا : ان اختلاف ترتيب العناصر في المجموعة لايؤثر في المجموعة ذاتها، وليس لهذا الترتيب او اختلافه دلالة منطقية او رياضية. ولتوضيح ذلك نضرب الأمثلة الآتية : -

س = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ }

س = { ب ، هـ ، أ ، جـ ، د }

المجموعتان لاتختلفان على الرغم من اختلاف ترتيب عناصرها. وبالتالي فهما متساويتان في عدد العناصر المنتمية لكل مجموعة منها.

وليست جميع المجموعات التي نتعامل معها في المنطق والرياضيات مجموعات نهائية محدودة العناصر، بحيث يمكن عدها بقائمة او امكانية عدها لطبيعتها بقائمة، بل للمجموعات اللانهائية اهمية كبرى في فروع الرياضيات البحتة وفي علم المنطق، كما ان استحالة عد المجموعة اللانهائية قد اجبر عالم المنطق والرياضيات على ضرورة استخدام طريقة الصفة المشتركة دون طريقة القائمة ومن الأمثلة على ما نذهب اليه ما يأتي : -

م = { أ : أ عدد طبيعي }

فهذه المجموعة تحتوي على جميع الأعداد الطبيعية، فاذا أردنا معرفة عددها لاستحال الأمر، لانها مجموعة لانهائية وقد عبرنا عنها بالصفة المشتركة.

ع = { أ : أ المستقيمات المتقاطعة في نقطة واحدة }

المجموعة ع تحتوي على كافة المستقيمات المتقاطعة في نقطة واحدة، وهذه المستقيمات من الوجهة الرياضية لانهائية ولايمكن عدها الى نهايتها.

المبحث الثاني : العمليات بين المجموعات.

(٥٦)

توجد علاقات منطقية بين المجموعات لها خواصها المنطقية ، ولاشك انها تؤلف جوهر نظرية المجموعات ، وتشكل التكوينات الجديدة لعبارات المجموعات من جهة ، والاسس القويمة للنظرية من جهة اخرى . ولتبسيط موضوع البحث سنحاول بالمثال والرسم التعبير عن هذه العلاقات .

واول العلاقات التي نتناولها بالدراسة هي "الاتحاد Union" بين مجموعة واخرى ، فيقال : تتحد مجموعتان او اكثر مكونة مجوعة جديدة يطلق عليها اسم "مجموعة الاتحاد" ويمكن تعريف هذه المجموعة بواسطة دالات القضايا التي تعبر عن انتماء عنصر الى مجموعة ، وبالشكل الآتي : —

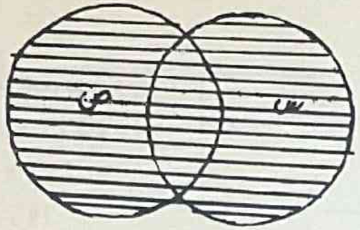
تعريف (٢١)

س ∪ ص = { أ : أ ∈ س ∨ أ ∈ ص }

من الملاحظ في التعريف ظهور رمز جديد هو "∪" ومعناه علاقة اتحاد ، كما يظهر لنا استخدام رابطة البدل عند التعريف ، وهذه مسألة لها دلالة منطقية مهمة هي ان البدل كما تعلمنا رابطة تربط بين القضايا اصلا ، كما تربط بين دالات القضايا ، فاذا مااستخدمت في نظرية المجموعات فهذه دلالة على الاعتماد المنطقي للمجموعات على الدالات والقضايا بصورة خاصة .

والتعريف الآنف الذكر معناه : اتحاد مجموعتين س ، ص هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي على الاقل الى احدى المجموعتين .

ويمكن التعبير عن مجموعة الاتحاد بدوائر اويلر-ڤن Euler – Venn وبالصورة الآتية : —



ويعبر عن مجموعة الاتحاد بجدول نطلق عليه اسم "جدول الانتماء لمجموعة الاتحاد" ، ونختار للانتماء [اي في حالة انتماء العنصر الى المجموعة] الرقم ١ ، بينما نختار لعدم الانتماء [اي في حالة عدم انتماء العنصر الى المجموعة] الرقم . ، وبذلك يأخذ الجدول لهذه العملية الصورة التالية : —

س	ص	س ص
١	١	١
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

الارقام المثبتة في الجدول اعلاه (الواحد والصفر) تناظر الصدق والكذب في جداول القيم المعروفة في نظرية القضايا ، لذلك يمكننا تسمية ماورد تحت كل من س ، ص باحتمالات الانتماء واللاانتماء . اما ماورد في الحقل الاخير من الجدول وهو (١ ، ١ ، ١ ، ٠) تحت مجموعة الاتحاد س ص ، فما هو الا تعبير عن انتماء العناصر للمجموعة الجديدة . وهي تعني ان جميع العناصر تنتمي الى مجموعة الاتحاد في حالة انتماء العناصر الى المجموعة س وانتماء عناصر اخرى الى المجموعة ص ، أوأن العناصر تنتمي الى مجموعة الاتحاد اذاكانت منتمية الى احدى المجموعتين في الاقل . ولاتنتمي الى مجموعة الاتحاد أي عنصر اذا لم تكن هناك عناصر منتمية الى المجموعة س والمجموعة ص . ولايقتصر الاتحاد على مجموعتين فقط ، بل يمكن ان تكون المجموعة الاتحادية لاكثر من مجموعتين ، ولتوضيح ذلك نفترض ثلاث مجموعات هي

س ، ص ، ع

نختار اولا مثالا على اتحاد مجموعتين : —

س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

ص = {٣، ٦، ٧}

ع = {٦، ٨، ٩}

س ∪ ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

ويمكن ان تتحد المجموعة س ∪ ص مع المجموعة ع : (س ∪ ص) ∪ ع ،
ويمكن ان تتحد المجموعة س مع المجموعة ص ∪ ع: س ∪ (ص ∪ ع)

(س ∪ ص) ∪ ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

س ∪ (ص ∪ ع) = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

وفي جميع الحالات تكون : —

(س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع)

ونختار مثالا بسيطا ثانيا لتوضيح ذلك : —

س = {أ، ب، جـ، د}

ص = {جـ، هـ، و}

ع = {أ، هـ، ز}

س ∪ ص = {أ، ب، جـ، د، هـ، و، }

(س ∪ ص) ∪ ع = {أ، ب، جـ، د، هـ، و، ز}

ثم : —

ص ∪ ع = {جـ، هـ، أ، ز} ، أ ،

∴ (س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع)

وبذلك تكون مجموعة الاتحاد للمجموعات الثلاث في الطرف الايمن مساوية لمجموعة الاتحاد للمجموعات الثلاث في الطرف الايسر.

اما جدول الانتماء لثلاث مجموعات مع مجموعة الاتحاد لها فيمكن عرضه بالطريقة الآتية : —

س	ص	ع	(س∪ص)∪ع	س ∪ (ص∪ع)
١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١
١	٠	١	١	١
١	٠	٠	١	١
٠	١	١	١	١
٠	١	٠	١	١
٠	٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠

ولمجموعة الاتحاد خواص منطقية مهمة ، لانها تعبر عن قوانين معروفة في المنطق ومنطق المجموعات بالذات ، لذلك سنطلق على كل خاصية اسم القانون الخاص بها : —

س ∪ ص = س	قانون الكمون	Idempotent
ش ∪ ϕ = ش	خاصية المجموعة الخالية	
س ∪ ص = ص ∪ س	القانون التبديلي	Commutative Law
س ∪ ش = ش	خاصية المجموعة الشاملة	
(س∪ص)∪ع = س ∪ (ص ∪ ع)	قانون الدمج	Associative Law

(٥٧)

وتتقاطع المجموعات بعضها مع بعض ، فاذا تقاطعت مجموعتان او اكثر مكونة مجموعة جديدة ، فان النتيجة هي "مجموعة التقاطع" ويمكن تعريف هذه المجموعة بواسطة دالات القضايا التي تعبر عن انتماء عنصر الى مجموعة وبالصورة الآتية : —

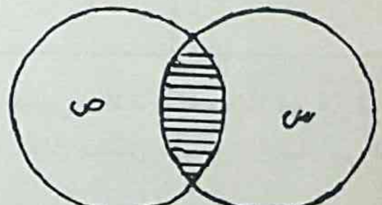
تعريف ٢٢

س ∩ ص = { أ : أ ∈ س ∧ أ ∈ ص }

من الملاحظ في التعريف ان الرمز ∩ يشير الى علاقة التقاطع ، وان رابطة العطف التي وردت في التعريف تشير الى رابطة بين دالات القضايا ، وان استخدامها في نظرية المجموعات يدل على الاعتماد المنطقي لنظرية المجموعات على الدالات والقضايا.

ويشير التعريف الى حقيقة منطقية مهمة هي : تقاطع مجموعتان مكونة مجموعة جديدة تحتوي على مجموع العناصر التي تنتمي الى كل من المجموعتين.

ويمكن التعبير عن مجموعة التقاطع بالدوائر كذلك : -



ويعبر عن مجموعة التقاطع بجدول نطلق عليه اسم "جدول الانتماء لمجموعة التقاطع" ونختار بنفس الطريقة السابقة الرقم ١ اشارة للانتماء ، والرقم . اشارة لعدم الانتماء وبذلك يأخذ الجدول الشكل الآتي : -

س	ص	س ص
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	٠

ونختار مثالا بسيطا لتوضيح مجموعة التقاطع .

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

س ∩ ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ∩ { ٢ ، ٤ ، ٦ }

= { ٢ ، ٤ }

ولايقتصر التقاطع على مجموعتين فقط ، بل يمكن ان يكون بين اكثر من مجموعتين وبالطريقة الآتية : -

نفترض ثلاث مجموعات هي : س ، ص ، ع

يمكن ان تتقاطع المجموعة س مع المجموعة ص : س ∩ ص ، ثم تتقاطع مجموعة التقاطع مع المجموعة ع : (س ∩ ص) ∩ ع ، ويمكن ان تتقاطع المجموعة س مع مجموعة التقاطع ص ∩ ع بالشكل الآتي س ∩ (ص ∩ ع) وفي جميع الحالات تكون : -

(س ∩ ص) ∩ ع = س ∩ (ص ∩ ع)

ونختار مثالا لتوضيح ذلك : -

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

س ∩ ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ∩ { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

= ٢ ، ٤ ، ٦

(س ∩ ص) ∩ ع = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ∩ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

= { ٢ }

ثم : -

ص ∩ ع = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ∩ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

ص ∩ ع = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

س ∩ (ص ∩ ع) = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ∩ { ٢ ، ٣ ، ٥ }

= { ٢ }

وبذلك تكون مجموعة التقاطع للمجموعات الثلاث في الطرف الايمن مساوية لمجموعة التقاطع للمجموعات الثلاث نفسها في الطرف الايسر.

اما جدول الانتماء لثلاث مجموعات ، فيمكن عرضه بالطريقة الآتية :-

س	ص	ع	(س ∩ ص) ∩ ص	س ∩ (ص ∩ ع)
١	١	١	١	١
١	١	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	٠	٠
٠	١	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠

ولمجموعة التقاطع خواص منطقية مهمة هي قوانين منطقية معروفة في منطق المجموعات ، لذلك سنطلق على كل خاصية اسم القانون الذي يعبر عنها.

س ∩ س = س	قانون الكمون
س ∩ ϕ = ϕ	خاصية المجموعة الخالية
س ∩ ص = ص ∩ س	القانون التبديلي
س ∩ ش = س	خاصية المجموعة الشاملة
(س ∩ ص) ∩ ع = س ∩ (ص ∩ ع)	قانون الدمج

(٥٨)

ومن الملاحظ ان الاتحاد والتقاطع بين المجموعات عملية ثنائية ، حيث تكون بواسطة مجموعتين مجموعة جديدة . ولكننا الان ازاء عملية احادية ، فمن مجموعة معينة نحصل على مجموعة جديدة ، وتسمى المجموعة الجديدة باسم :

((المجموعة المكملة Complement Set)) ، ولتوضيح هذه العملية نقول :-

اذا كانت لدينا مجموعة شاملة ش ، ومجموعة جزئية Subset س من المجموعة الشاملة ، فان المجموعة التي تتكون من عناصر ش ، ولاتنتمي الى س هي المجموعة المكملة للمجموعة س بالنسبة الى المجموعة ش ، ويرمز للمجموعة المكملة بالرمز سَ.

تعريف (٢٣)

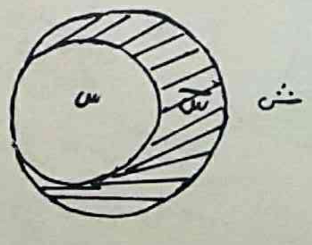
سَ = {أ : أ ∌ س}

وواضح ان أ ∈ سَ ⟷ أ ∌ س

ويمكن قراءة تعريف المجموعة المكملة لغويا بالشكل الآتي :-

المجموعة المكملة هي المجموعة العناصر التي لاتنتمي الى س وذلك على اساس ان المجموعة المكملة هي س ، وان س هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة.

ويعبر عن المجموعة المكملة بالدوائر كما يأتي :-



ويعبر عن المجموعة المكملة لمجموعة بجدول نطلق عليه اسم "جدول الانتماء للمجموعة المكملة ، وهو كما يأتي :-

$\bar{\text{س}}$	س
٠	١
١	٠

ونختار مثالا بسيطا لتوضيح المجموعة المكملة : -

ش= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ، ٦ ، ٧ ، ٨}

س= {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

$\bar{\text{س}}$= {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

وللمجموعة المكملة خواصها المنطقية المتميزة ، وسنقتصر على ذكر مجموعة الخواص التي تظهر بين المجموعة المكملة وعمليات الاتحاد والتقاطع بالاضافة الى علاقتها بالمجموعة الخالية والمجموعة الشاملة ، وهذه الخواص هي ؛ -

$\bar{\text{ش}} = \phi$

$\bar{\phi} = \text{ش}$

ومعنى ذلك : ان مكملة المجموعة الشاملة هي المجموعة الخالية ، وان مكملة المجموعة الخالية هي المجموعة الشاملة .

$\overline{\overline{(\text{ش})}} = \text{ش}$

$\text{س} \cup \bar{\text{س}} = \text{ش}$

$\text{س} \cap \bar{\text{ش}} = \phi$

$\overline{\text{س} \cup \text{ص}} = \bar{\text{س}} \cap \bar{\text{ص}}$

$\overline{\text{س} \cap \text{ص}} = \bar{\text{س}} \cup \bar{\text{ص}}$

$\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$

$\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$

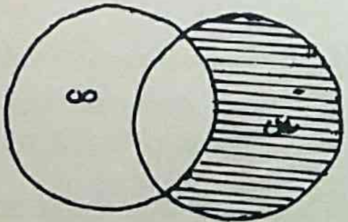
ومن العمليات المنطقية بين المجموعات مانطلق عليها اسم "الفرق Difference" فاذا افترضنا مجموعتين هما س ، ص ، فان المجموعة التي نطلق عليها اسم مجموعة الفرق بين المجموعتين تكون س —— ص. ولتوضيح هذه العملية نخطو بالتدريج وبالاسلوب الآتي : -

المجموعة س هي مجموعة جزئية من المجموعة ش
وكذلك ص مجموعة جزئية من المجموعة ش
فمجموعة العناصر التي تنتمي الى س ولاتنتمي الى ص
تسمى مجموعة فرق س عن ص

تعريف (٢٤)

$\text{س} - \text{ص} = \{ \text{أ} : \text{أ} \in \text{س} \wedge \text{أ} \notin \text{ص} \}$

وبعبارة اخرى : الفرق بين المجموعتين س ، ص هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي الى المجموعة س ولاتنتمي الى المجموعة ص ويمكن تمثيل هذه العملية بالدوائر كما يأتي : -



ويعبر عن الفرق بين مجموعتين بجدول نطلق عليه اسم "جدول الانتماء لعملية الفرق" وهو كما يأتي : -