ان ابسط طريق لتحقيق ذلك في اختيار صيغ تبدو صحيحة البناء مع العلم انها غير ذلك لانها تخل باحدى قواعد البناء في الاقل ، مثال ذلك : –

ق ٧ ل ٧ ق

ق ⟵ ل ⟵ ق

فالصيغة الاولى يمكن البرهنة على انها صيغة صحيحة من غير ان يدرك المرء اين يقع الخطأ الا بعد التأمل ودراستها بعناية . ومايصدق على الاولى يصدق كذلك على الثانية : –

فبالنسبة للاولى يمكن ان يكون الاستدلال كما يأتي : –

١ . اذا كانت ق ، ل صصب فان ق ٧ ل صصب [القاعدة الثانية] .

٢ . واذا كانت ق ٧ ل صصب (الخطوة الاولى ، و ق صصب ، فان ق ٧ ل ٧ ق) .

والآن اين وقع الخطأ : –

ان رابطة البدل الثنينية تربط قضية بأخرى ، ولكن في هذه الصيغة نجد البدل مرتين من غير ان نعرف مجاله بالدقة المنطقية وهذا اخلال بالقاعدة السابقة فان قلنا ان قوة الرابطة وقاعدتها هي التي تسمح بذلك فهذا خطأ لان الصيغة تحتوي على رابطة واحدة مكررة فهي واحدة من نفس القوة . فالصيغة بناء على ذلك غير صحيحة البرهان لعدم تحديد مجال الرابطة ، فهل هي (ق ٧ ل) ٧ ق ، أو ق ٧ (ل ٧ ق)؟

فان كانت مثل واحدة من هاتين الصيغتين ، فان الصيغة صحيحة البناء لانها استوفت القاعدة السابقة .

ومثل ذلك يصدق على الصيغة ق ⟵ ل ⟵ ق ، فهذه صيغة غير صحيحة البناء لان مجال الشرطية غير واضح فهي تخل بالقاعدة السابقة ، كما لايمكن الاعتماد على قاعدة قوة الرابطة المنطقية لان الرابطة واحدة مكررة فهي ذات قوة ربط واحد . فالصيغة بناء على ذلك غير صحيحة البرهان لعدم تحديد مجال الرابطة ، فهل هي : –

(ق ⟵ ل) ⟵ ق ، أو ق ⟵ (ل ⟵ ق)

فان كانت واحدة من هاتين الصيغتين ، فان الصيغة صحيحة البناء لانها استوفت القاعدة السابقة .

الفصل الثاني

نظرية دالات القضايا
(حساب المحمولات)

المبحث الاول : – دالة القضية

(٣٨)

لاشك ان مفهوم "الدالة Function" من المفاهيم الضرورية المستخدمة في الرياضيات ، الا ان بعض المناطقة ، وعلى رأسهم جوتلوب فريجة (١٨٤٨ – ١٩٢٥) قد استعار هذا المفهوم ليجد له تطبيقاً في تحليلاته المنطقية ، فغدا بعد ذلك من مفاهيم المنطق التي لايمكن الاستغناء عنها .

وفي سبيل أن نفهم مفهوم "دالة القضية" بصورة واضحة ومن الزاوية المنطقية ، لابد لنا من استعارة مفاهيم رياضيية اخرى وجدت لها تطبيقات منطقية ناجحة . ففي الرياضيات تقسم الرموز الى مجموعتين او نوعين : المجموعة الاولى تضم تلك الرموز التي تتغير قيمتها العددية او معناها ، ويطلق عليها عادة "المتغيرات Variables" والمجموعة الثانية تضم تلك الرموز التي لاتتغير قيمتها او معانيها ، بل تبقى ثابتة المعنى في الصيغة ، ويطلق عليها عادة "الثوابت Constants" ففي علم الحساب والجبر نواجه مثلا الصيغة الآتية : –

أ+ب=ب+أ

فالحروف الابجدية تشير الى متغيرات حدود في الصيغة وهي أ ، ب ، ويمكن ان نختار مجموعة كبيرة من القيم العددية لتحل محل هذه المتغيرات كقيم مثال ذلك : –

٢+٣=٣+٢

٣+٤=٤+٣

٥+٤=٤+٥ وهكذا

فالاعداد ٢ ، ٣ ، ٥ التي اقترنت بالحرف أ ثابتة المعنى ، وهي مع غيرها تصلح ان تكون قيما للمتغير أ ، ويصدق الشيء نفسه بالنسبة للمتغير ب الذي اقترنت به الاعداد الآتية : ٣ ، ٤ ، ٤ ، وهذه الاعداد مع غيرها تؤلف مجموعة تصلح ان تكون قيما للمتغير ب . والى جانب هذه الرموز في الصيغة نجد مجموعة اخرى من الرموز لم تتغير وهي += ، فهي رموز معروفة المعنى من جهة وغير قابلة للتغيير في الصيغة من حيث المعنى من جهة اخرى . ومثل هذه الرموز وغيرها تؤلف مجموعة الثوابت .

وبناءً على ذلك نصل الى النتيجة الآتية : توجد رموز مثل أ ، ب ، جـ ، د ، ... هي متغيرات في الصيغ ويمكن ان تحل محلها ثوابت عددية او اعداد ، فهي تشير الى المكان الذي يمكن ان تحل فيه قيمة عددية ، اما الرموز الاخرى وغيرها مثل :-
+ ، - ، = ، √ ، ١ ، ٢ ، ٣ ..... وغيرها فانها ذات معان ثابتة لاتتغير في الصيغة .

تعريف (١٢)

المتغير=رمز ليس له معنى ثابت ، ويمكن ان تحل محله اية قيمة مناسبة .

تعريف (١٣)

الثابت=رمز له معنى ثابت في الصيغة ، وغير قابل للتغيير في المعنى.

(٣٩)

وفي دالات القضايا نركز اهتمامنا على التركيب او البناء الداخلي للقضية ، فنقوم بتحليل القضية الى اجزائها ونعرضها بصيغة رمزية مناسبة. واذا علمنا ان القضايا تختلف من حيث البناء بعضها عن بعض ، وان الواجب المنطقي يلزمنا باختيار الرموز المناسبة لاجزاء القضية المختلفة ، فأن اولى بل وابسط المهمات المنطقية في هذا الباب ان نميز بين المتغير والثابت في الصيغة ، ولاجله نختار بعض الامثلة البسيطه

أ . انسان

أ . اكبر من ب

أ . اصغر من ب

اذا كانت أ=ب و ب= جـ فأن أ=جـ

√أ٢ = أ

في المثال الاول نجد جزأين : الجزء المتغير وهو أ والجزء الثابت "انسان" والملاحظ ببساطة انه بالامكان أن نقدم مجموعة من القيم لتكون بديلاً عن أ ، فتتحول الصيغة الى قضية قد تكون صادقة او كاذبة ولتوضيح ما نذهب اليه نورد الأمثلة الآتية :-

يمكن ان تحل محل أ القيم الآتية :-

أ=سقراط

أ=رئيس محكمة التمييز

أ=مدير الشرطة

أ=الشمبانزي

أ=الجرثوم

وبذلك نحصل على القضايا الآتية :-

سقراط انسان	قضية صادقة
رئيس محكمة التمييز انسان	قضية صادقة
مدير الشرطة انسان	قضية صادقة
الشمبانزي انسان	قضية كاذبة
الجرثوم انسان	قضية كاذبة

ويصدق التحليل نفسه بالنسبة للصيغ المنطقية ذات المتغيرين أو اكثر، فاذا اخترنا للصيغة أ اكبر من ب ومجموعة اعداد للمتغير أ ومجموعة اخرى للمتغير ب تحولت الصيغة الى قضية في كل مرة وعلى النحو الآتي :-

أ= ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١١

ب= ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، وبذلك نحصل على القضايا الآتية :-

٢ اكبر من ٤ قضية كاذبة
٣ اكبر من ٥ قضية كاذبة
٦ اكبر من ٦ قضية كاذبة
٩ اكبر من ٨ قضية صادقة
١١ اكبر من ١٠ قضية صادقة

ولايختلف المثال الثالث عن المثال الثاني ، فاذا اتخذنا القيم العددية التي سبق ذكرها لكل من المتغير أ ، ب ، فاننا سنحصل على القضايا الآتية : -

٢ اصغر من ٤ قضية صادقة
٣ اصغر من ٥ قضية صادقة
٦ أصغر من ٦ قضية كاذبة
٩ اصغر من ٨ قضية كاذبة
١١ اصغر من ١٠ قضية كاذبة

اما المثال الرابع فانه يحتوي على ثلاثة متغيرات هي أ ، ب ، جـ ، ولكي تتحول الصيغة الى قضية نختار في كل مرة ثلاث قيم وعلى الوجه الآتي : -

أ=٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨
ب=٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨
جـ = $\sqrt{٤}$ ، ٤ ، ٢×٣ ، ٥+٣

وبذلك نحصل على القضايا الآتية : -

اذا كانت ٢=٣ و ٣=$\sqrt{٤}$ فان ٢=$\sqrt{٤}$	قضية صادقة
اذا كانت ٤=٤ و ٤=٤ فان ٤=٤	قضية صادقة
اذا كانت ٦=٥ و ٥=٢ ×٣ فان ٦=٢×٣	قضية صادقة
اذا كانت ٨=٨ و ٨=٥+٣ فان ٨=٥+٣	قضية صادقة

اما المثال الخامس والاخير فانه يحتوي على متغير واحد هو أ ، وان الصيغة الجبرية تبقى صادقة مهما اعطينا للمتغير أ من قيم مختلفة مثال ذلك : -

أ=٢ ، ٦ ، ٩

وبذلك تتحول الصيغة الى القضايا الآتية : -

$\sqrt{٢^{٢}}=٢$ قضية صادقة
$\sqrt{٦^{٢}}=٦$ قضية صادقة
$\sqrt{٩^{٢}}=٩$ قضية صادقة

(٤٠)

واذا انتقلنا الى موضوع الدالة ، فمن الضروري ان نميز بين الدالة التي تمثل الجزء الثابت في الصيغة والحد Argument الذي يمثل الجزء المتغير فنقول ان للدالة مثلا س حداً واحدا أو حدين أو اكثر. وجاءت التسمية " دالة القضية " من احتواء الصيغة او القضية على جزء ثابت وحد واحد أو اكثر.

وقبل ان نقدم على تعريف الدالة، ودالة القضية والحد ارى انه من الضروري استعراض بعض انواع دالات القضايا الظاهرة في الانواع المعروفة من القضايا.

ونبدأ بانواع القضايا وهي : -

القضية البسيطة Simlpe Proposition التي تتألف من موضوع ومحمول القضية المركبة Compound Proposition التي تتألف من اكثر من قضية بسيطة.

القضية الجزئية او الوجودية Existential Proposition التي يشير فيها سور القضية الى الجزئي اوكما يقال : "واحد على الاقل".

القضية الكلية General proposition التي يشير فيها سور القضية الى الكل.

فمن الامثلة على القضية البسيطة مايأتي : -

الثلج ابيض : تتألف هذه القضية من موضوع Subject وهو الثلج ، ومن محمول Predicate وهو "ابيض".

ومن الملاحظ ان الصفة "ابيض" لاتنطبق على الثلج وحده بل يمكن ان تنطبق على اشياء كثيرة، فانها تنطبق على سبيل المثال على "الورق": "فنقول": "الورق ابيض"، وعلى "البيض" فنقول: "البيض ابيض" وعلى "الخشب" فنقول: "الخشب ابيض" وهكذا ومعنى ذلك: انه اذا جعلنا الموضوع متغيرا مع ثبوت الصفة او المحمول الذي يطلق على موضوعات كثيرة، فاننا نحصل على الصيغة الآتية: –

أ ابيض

واذا اخترنا رمزا ثابتا للمحمول مثل س فاننا نحصل على صيغة رمزية ندونها اتفاقا بالصورة الآتية: –

س أ: حيث يمكن ان تقرأ بالصورة الآتية: –

س تحمل على أ، وهذه صيغة تعبر بلا شك عن القضية التي سبق ذكرها من حيث التراكيب.

ومن الامثلة على القضية البسيطة مايشير الى انتماء عنصر الى مجموعة مثال ذلك: سقراط انسان: فهذه قضية تتألف من موضوع ومحمول، ولكنها تختلف عن سابقتها بأن سقراط وهو بذلك ينتمي الى مجموعة من المخلوقات تطلق عليها اسم "انسان" فاذا رمزنا الى الموضوع بالرمز أ– والى المحمول بالرمز س، فاننا نحصل على صيغة منطقية تعبر عن التركيب الداخلي للقضية من جهة، ومشيرة الى انتماء أ الى المجموعة س من جهة اخرى، وبالصورة الآتية: –

أ ∈ س: حيث تقرأ بالصورة الآتية: – أ تنتمي الى المجموعة س، علما باننا نستطيع أن نختار للمتغير أ مجموعة من القيم التي هي اشخاصا مثال: افلاطون، الغزالي، الكندي، ارسطو، رسل، صلاح الدين الايوبي، وهكذا.

وقد تكون القضية البسيطة محتوية على اكثر من موضوع واحد مع محمول واحد فقط، وعندئذ يقال ان هذه القضية بسيطة ذات موضوعين، وتلكم قضية ذات ثلاثة مواضيع أو حدود وهكذا. مثال ذلك: –

احمد اكبر من محمود
محمود اصغر من احمد

الضلع أ ب يساوي الضلع جـ د
الكتاب بين المنضدة والكرسي

فالمثال الاول "احمد اكبر من محمود" يتكون من موضوعين هما احمد ومحمود، ومن علاقة هي "اكبر من" نعتبرها في المنطق محمولا. فاذا رمزنا الى العلاقة أو المحمول بالرمز ">" والى الموضوعين بالرمزين أ، ب، فاننا سنحصل على تركيب لهذه القضية بالصورة الآتية: –

أ > ب وتقرأ أكبر من ب

وبالنسبة للمثال الثاني فانه يتكون كذلك من موضوعين هما "محمود واحمد" ومن علاقة أو محمول "اصغر من" وبذلك يكون بناء القضية بعد تدوينها رمزيا بالصورة المنطقية الآتية: –

ب < أ وتقرأ ب أصغر من أ

اما المثال الثالث فانه يتكون كذلك من موضوعين هما الضلع أ ب والضلع جـ د، ومن محمول واحد هو "يساوي" وبذلك يكون بناء هذه القضية بعد تدوينها رمزيا بالصورة الآتية: –

أ ب = جـ د

اما المثال الرابع فانه يتكون من ثلاثة موضوعات أو حدود هي: "الكتاب، المنضدة"، والكرسي"، ومحمول واحد هو "بين" الذي يشير الى العلاقة البينية بين الموضوعات، وبذلك يكون بناء هذه القضية بعد تدوينها رمزيا بالصورة المنطقية الآتية: –

أ ─ ب، جـ وتقرأ بين ب و جـ

(٤١)

نجد في جميع الصيغ السالفة الذكر جزءا ثابتا لايتغير من حيث المعنى في الصيغة وجزءاً متغيرا من حيث تغير معناه في الصيغة، وسبق لنا ان عرفنا المتغير والثابت، ولكن نظرتنا للمسألة بصدد هذه الامثلة مختلفة او ننظر اليها من زاوية تركيبها من دالة وحد، او دالة وحدين، او دالة وثلاثة حدود وهكذا.

وبناءً على ذلك يصبح من الميسور تعريف "الدالة" بالصورة الآتية : –

تعريف (١٤)

الدالة : في قضية سواء كانت صادقة اوكاذبة ، سواء كانت تحتوي على موضوع او حد واحد أو اكثر ، فان البناء الداخلي فيها الذي نعبر عنه بالتدوين الرمزي يوجد جزء ثابت لايتغير معناه ، وجزء آخر يتغير معناه ويشير الى شيء ، فالجزء الثابت هو الدالة ، والجزء المتغير هو حدها الذي يمكن ان نستعيض عنه باسم له معنى [٥] .

ولما كان اهتمام المنطق ينصب على القضايا في نظرية القضايا،وعلى دالات القضايا التي تمثل التراكيب الداخلية للقضايا المختلفة ، فان الصيغ المنطقية التي سبق ذكرها في هذا المبحث هي دالات قضايا . فعلى سبيل المثال ان المحمول س في المثال الاول هو دالة وان المتغير أ هو حدها ، وان اللفظ "ينتمي الى" دالة كذلك ، وان المتغير أ هو حدها اما س فانها في هذا المثال تشير الى مجموعة اما بالنسبة للامثلة الاخرى ، فان المثال "احمد اكبر من محمود" والذي اتخذ الصورة الرمزية أ > ب ، فان الدالة في هذه الصيغة هي "اكبر من" وان حديها هما كل من احمد ومحمود او بالصيغة الرمزية تكون الدالة ">" وان حديها هما أ ،ب ويصدق التحليل المنطقي نفسه بالنسبة للقضية "محمود اصغر من احمد" والتي اتخذت صورتها الرمزية ب أ ، حيث ان الدالة في هذه القضية هي "اصغر من" وان حديها هما محمود واحمد . اما الصيغة الرمزية فان الدالة هي "<" وان حديها ب ، أ .

اما المثال الآخر : (الضلع أ ب يساوي الضلع جـ د) فان صيغته المنطقية هي : – أ ب = جـ د ودالته هي "يساوي" وان حدود هذه الدالة هما أ ب ، جـ د .

٥) يتطابق هذا التعريف مع ماذهب اليه فريجة في كتابه الموسوم:
Frege, G., Begriffsschrift P:16 (Georg Olms Verlagsbuchhandlwg 1964)

وفي المثال الاخير "الكتاب بين المنضدة والكرسي" والذي اتخذ صورته الرمزية أ ب ، جـ فان الدالة فيه هي العلاقة البينية "بين" وان حدودها الثلاثة هي أ ، ب ، جـ . وبناء على ذلك نستطيع التوصل الى تعريف دالة القضية بالصورة الآتية : –

تعريف (١٥)

دالة القضية: صيغة،فيها جزء ثابت المعنى ولها متغير واحد في الاقل ، تتحول الى قضية بمجرد اعطاء قيم لمتغيراتها او بمعنى آخر: انها صيغة قضية فيها متغير واحد أو اكثر تتحول الى قضية في حالة اعطاء قيم لمتغيراتها [٦] .

(٤٢)

وليست جميع القضايا التي يتعامل معها المنطق هي من نوع القضايا البسيطة الآنفة الذكر بل ان ارتباط القضايا كوحدات منطقية بعضها ببعض يؤلف من غير ادنى شك قضايا مركبة ، وهي قضايا ذات اهمية كبيرة بالنسبة للدراسات المنطقية واذا اكتفينا بالقضايا البسيطة باعتبارها متغيرات قضايا في الصيغ المركبة فاننا نحصل على الاشكال المنطقية الآتية : –

ق ٧ ل

ق ٨ ل

ق ← ل

ق ↔ ل

ويمكن للقضايا المركبة ان تكون اكثر تعقيدا استنادا الى عدد متغيراتها والروابط المنطقية التي تقوم بعملية ربط القضايا البسيطة بعضها ببعض. مثال ذلك : –

٦) استخدم فريجة هذا المفهوم (مفهوم الدالة) في كتابه اللغة الرمزية Begriffsschrift ص ١٦ "واستخدم رسل هذا المفهوم اول الامر في كتابه "مبادئ الرياضة the Principles of Mathematics ص ١٩ " على اساس ان المتغير فيها يستقبل قيمة او قيما لتتحول الى قضية ثم استخدمه في كتابه مع وايتهيد " اصول الرياضيات principia mathematica ص ١٤ بنفس المعنى.

ق ٧ ل ← ل ٧ ق

ق ٨ ل ← ل ٨ ق

ق ٧ ل ← ¬ (ق ٨ ¬ ل)

ق ٨ ل ← ¬ (¬ ق ٧ ¬ ل) ..... وهكذا.

وبناءً على ذلك نستطيع أن نتعرف على القضية البسيطة من خلال تعريفها ، وذلك على أساس أنها قضية لايمكن تجزئتها الى قضايا أبسط منها . وأنها ترتبط بروابط منطقية مع قضايا أخرى لبناء قضايا مركبة . كما نستطيعَ أن نتعرف على القضية المركبة من خلال تعريفها كذلك ، وذلك على أساس أنها قضية تتكون من أكثر من قضية بسيطة واحدة ، ويمكن تجزئتها الى قضايا أبسط منها .

والمهم في المسألة من خلال تعريف دالة القضية أنها تسلك سلوك القضية في أرتباطها بالروابط المنطقية مع دالات قضايا أخرى فاذا أخذنا على سبيل المثال دالة بسيطة تتألف من دالة ذات حد واحد ، فأن التركيب المنطقي لها في أرتباطها مع بقية الدالات يكون كما يأتي : -

¬ س أ — دالة قضية مسبوقة بالنفي ، فهي دالة قضية سالبة أو منفية .

س أ ٨ ص أ — دالة قضية عطفية لتوسط العطف بين دالتين بسيطتين.

س أ ٧ ص أ — دالة قضية بدلية لتوسط البدل بين دالتين ببسيطتين.

س أ ← ص أ — دالة قضية شرطية لتوسط الشرطية بين دالتين بسيطتين.

س أ ↔ ص أ — دالة قضية تكافؤية لتوسط رابطة التكافؤ بين دالتين بسيطتين.

ويمكن كذلك كما هو الحال بالنسبة للقضايا المركبة التي تتألف من اكثر من قضيتين بسيطتين ان تكون الصيغة المركبة لدالات القضايا اعقد تركيبا مما سبق ذكره وتتضح حقيقة منطقية عن تحليلنا السالف الذكر هي نظرية دالات القضايا تعتمد الى حد كبير على نظرية القضايا ، وان جوهر الاختلاف بين نظرية القضايا ونظرية دالات القضايا يكمن

في استخدام نظرية دالات القضايا لاسوار القضايا Quantificators يترتب على ذلك من ضرورة بناء بديهيات زيادة خاصة بها ، وصيغ تعتمد من حيث الاساس على اسوار القضايا .

المبحث الثاني : اسوار القضايا

(٤٣)

أن من صلب نظرية دالات القضايا هو البحث في اسوار القضايا بانواعها وعلاقة كل سور ومجاله بسور آخر ومجاله . واذا كان لحساب القضايا مجموعة من البديهيات الخاصة به . فان لنظرية دالات القضايا هي الاخرى مجموعة من البديهيات الخاصة بها ، حيث تكون لاسوار القضايا في التعريفات والبديهيات الدور المنطقي المهم . ولغرض التبسيط نبدأ البحث بالدالات البسيطة التي تتألف من موضوع ومحمول مثال ذلك : –

س أ

فهذه دالة قضية بسيطة فيها حد واحد فقط وهو يمثل الجزء المتغير، وهذا المتغير غير محدود ، او بعبارة اخرى : متغير غير مقيد أو متغير حر Free varible ، ويمكن الاستعاضة عنه لتتحول الدالة الى قضية في حالة أن يكون س يشير الى معنى ثابت وبالاحرى هنا مجموعة من القيم يمكن ان تحل محل المتغير أ فتتحول الدالة الى قضية . ومن هنا نستطيع ان نعرف المتغير الحر بالصورة الآتية : –

تعريف (١٦)

> المتغير الحر= متغير يظهر في دالة القضية غير مرتبط بمجال محدود أو معين ، ويمكن الاستعاضة عنه باية قيمة فتتحول الدالة في ضوئها الى قضية [٧] .

والى جانب هذه الدالة البسيطة يمكن ان نضيف دالات قضايا اخرى لها اكثر من حد واحد أو متغير مثال ذلك : –

س (أ ، ب) دالة ذات حدين أو متغيرين حرين .

٧) هناك تسميات اخرى للمتغير الحر من ابرزها ماذكره رسل في مؤلفاته المنطقية بانه المتغبر الحقيقي Real variable ويقصد بالمجال المحدود مدى سور القضية سواء أكان كليا او جزئيا .

س (أ ، ب ، جـ) دالة ذات ثلاثة حدود او ثلاثة متغيرات حرة .

س (أ ، ب ، جـ ، د) دالة ذات اربعة حدود أ و اربعة متغيرات حرة .

وقد يرتبط متغير واحد أو اكثر في دالة القضية بمجال معين ، وعندئذ لابد من الاشارة الى ذلك عند التدوين الرمزي لها بصورتها المنطقية . ومن المعروف ان منطق ارسطو في القياس يحتوي على مجالين مختلفين لهما خصائص منطقية واضحة ، وقد سمي هذان المجالان على التوالي : –

سور القضية الكلي Universal quantificator وسور القضية الجزئي Particular quantificator وتمثل هذه الاسوار في نظرية القياس مع الروابط المنطقية جوهر العمل المنطقي . ونجد لهذه الاسوار اهميتها المنطقية كذلك في المنطق الحديث . ونصطلح على تدوربنها رمزيا بالصورة الآتية : –

(أ) س أ : حيث يشير الرمز (أ) الى قولنا (كل أ) ، وتقرأ هذه الصيغة بالصورة الآتية : –

س تحمل على كل أ ، وذلك على اساس ان س تمثل دالة كما تمثل محمول القضية . وفي هذه الصيغة نلاحظ بالاضافة الى الدالة س ان المتغير أ مرتبط بها ، وذلك من خلال سور القضية الكلي وهذا معنا : ان المتغير أ في الصيغة متغير مقيد ، Bound Variable .

(Eأ) س أ : حيث يشير الرمز (E أ) الى (بعض أ) او بالعبارة الحديثة : يوجد واحد في الاقل وتقرأ الصيغة بالصورة الآتية : –

س تحمل على بعض أ ، وذلك على اساس ان س تمثل دالة كما تمثل محمول القضية ويمكن القول كذلك ان س تحمل على واحد في الاقل هو أ وفي هذه الصيغة نلاحظ بالاضافة الى الدالة س ان المتغير أ مرتبط بها . وذلك من خلال سور القضية الجزئي ، وهذا معناه : ان المتغير أ في الصيغة متغير مقيد كذلك .

ان هذه الصيغ للقضية الكلية والقضية الجزئية تختلف في اسلوب تدوينها الرمزي عن الاسلوب القديم الذي يدون صورة القضية الكلية : أ، ب. وصورة القضية الجزئية : أ، ب عندما تكونان في حالة الايجاب.
المهم في الأمر الآن هو أن نعرف المتغير المقيد لتحديد معناه بدقة.

تعريف (١٧)

المتغير المقيد= متغير مرتبط بسور قضية كلي او سور قضية جزئي في دالة قضية معينة.

(٤٤)

واذا اردنا دراسة بعض الخصائص المنطقية للدالة الكلية والدالة الجزئية من خلال علاقة كل واحدة منها بالنفي والروابط المنطقية الاخرى، فاننا نحصل على مجموعة من الصيغ المتنوعة التي لها اهميتها في المنطق. ولاجل ذلك سنبين بالتتابع دور النفي بالنسبة لهذا النوع من الدالات، وكيف تظهر في صيغ تحتوي على روابط منطقية، حيث تتضح الصور المنطقية من خلال التدوين الرمزي اهمية اسوار القضايا في الصيغ المنطقية المختلفة

اولا : للنفي دوره المتميز في التدوين الرمزي وفي تغيير معنى الصيغة من خلال موقعه في الصيغة.

أ. يمكن ان ننفي الصيغة ذات السور الكلي أو الجزئي، وتظهر عندئذ بالصورة المنطقية الآتية.

¬ [(أ) س أ]
¬ [(E أ) س أ]

ب. يمكن ان ننفي سور القضية فقط في دالة القضية، وتظهر عندئذ بالصورة المنطقية الآتية.

¬ [(أ) س أ] ¬ (أ) سَ
¬ [(E أ) س أ] ¬ (E أ) سَ

ج. يمكن ان ننفي الدالة من دون ان نفترض للسور بالنفي وتظهر الصيغة عندئذ بالصورة الآتية : −

(أ) ¬ (س أ)
(E أ) ¬ (س أ)

د. يمكن ان ننفي صيغة تحتوي على النفي وسور القضية، وتظهر الصيغة عندئذ بالصورة الآتية : −

¬ [(أ) س] ¬ [(أ)] ¬ سَ أ]
¬ [(أ) س أ]

ثانيا :
وتظهر الاسوار والدالة والروابط المنطقية في صور كثيرة نختار منها على سبيل الامثلة للدلالة على امكانات التدوين الرمزي : −

أ. سور كلي مع دالة والنفي ورابطة البدل.
(أ) (¬ س أ ٧ ص أ)
سور جزئي مع دالة والنفي ورابطة البدل.
(E أ) ¬ (¬ س أ ٧ ¬ ص أ)

ب. سور كلي مع دالة والنفي ورابطة العطف.
(أ) (س أ ٨ ¬ ص أ)
(أ) ¬ (¬ س أ ٨ ¬ ص أ)
سور جزئي مع دالة والنفي ورابطة العطف.
(E أ) (س أ ٨ ¬ ص أ)

ج. سور كلي مع دالة والنفي ورابطة الشريطة.
(أ) (س أ ← ¬ ص أ)
(أ) ¬ (س أ ← ص أ)

سور جزئي مع دالة والنفي ورابطة الشريطة.

(E أ) (س أ ⟵ ¬ ص أ)

(أ) (¬ س ¬ ¬ ص أ)

د. سور كلي مع دالة والنفي ورابطة التكافؤ.

(أ) (س أ ⟷ ¬ ص أ)

(أ) (¬ س ⟷ ¬ ص أ)

سور جزئي مع دالة والنفي ورابطة التكافؤ.

(E أ) ¬ (س أ ⟷ ص أ)

(E أ) (¬ س أ ⟷ ص أ)

ثالثاً: يظهر في جميع الامثلة التي ذكرناها آنفاً ان المتغير أ مرتبط بسور القضية (الكلي أو الجزئي)، لذلك نختار الآن بعض الامثلة التي يكون فيها احد المتغيرات غير مرتبط او حر، وليكن ب.

أ) صيغة فيها متغير حر وآخر مقيد مع رابطة البدل والنفي.

(أ) س أ ٧ ¬ ص ب

(E أ) ¬ س أ ٧ ص ب

ب) صيغة فيها متغير حر وآخر مقيد مع رابطة العطف والنفي.

(أ) س أ ٨ ¬ ص ب

ص ب ٨ ¬ (E أ) س أ

ج) صيغة فيها متغير حر وآخر مقيد مع رابطة الشريطة والنفي.

س ب ⟵ ¬ [(أ) ¬ ص أ]

س ب ⟵ (E أ) ¬ ص أ

د) صيغة فيها متغير حر وآخر مقيد مع رابطة التكافؤ والنفي.

¬ (أ) ¬ س أ ⟷ ص ب

(E أ) س أ ⟷ ¬ ص ب

وقد تتعقد دالات القضايا فتحتوي الصيغة منها على اكثر من دالتين، واكثر من رابطة منطقية واحدة. ونختار لذلك بعض الامثلة وهي كما يأتي: -

أ- صيغة فيها اكثر من دالة واحدة ورابطة البدل والشرطية.

(أ) س أ ٧ (أ) ص أ ⟵ (أ) (س أ ٧ ص أ)

(E أ) (س أ ٧ ص أ) ⟵ (E أ) س أ ٧ (E أ) ص أ

ب- صيغة فيها اكثر من دالة واحدة ورابطة الشرطية والعطف والنفي: -

(أ) (س أ ⟵ ص أ) ⟵ [س ب ¬ (أ) ص أ]

¬ [(E أ) س أ ⟵ (أ) ص أ) ⟵ (أ) س أ ٨ ¬ (أ) ص أ)]

ج- صيغة فيها اكثر من دالة واحدة ورابطة العطف وغيرها من الروابط

(أ) (س أ ٨ ص أ) ⟷ ¬ [(E أ) ¬ (س أ ٨ ص أ)]

(أ) (س أ ٧ ¬ ص أ) ⟷ ¬ [(E أ) (¬ س أ ٨ ¬ ص أ)]

د- صيغة فيها اكثر من سور قضية واحد.

(أ) (E ب) (س أ ⟵ ص ب)

(ا) س أ ٨ (ب) ص ب ⟷ (أ) (ب) ¬ (¬ س أ ٧ ¬ ص ب)

هـ- صيغ منطقية اخرى من نظرية الدالات.

(أ) (E ب) س أ ب ⟵ (E أ) س أ ب

(أ) س أ ب ⟵ (E أ) س ب أ

(E أ) (ب) س أ ب ⟵ (ب) (E أ) س أ ب

ويمكن الافادة من منطق ارسطو وبخاصة من علاقات القضايا بعضها ببعض لالقاء الضوء على بعض الخصائص المنطقية الاخرى في نظرية الدالات، وفيما يلي بعض العلاقات المهمة: -