وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بغداد

محاضرات في المنطق الرياضي

تأليف

الاستاذ الدكتور ياسين خليل

استاذ المنطق وفلسفة العلوم بجامعة بغداد

اعد المادة للنشر ونسقها واشرف عليها
مشهد سعدي العلاف

مقدمة

المنطق الرياضي : التدوين الرمزي

ان ابرز مايميز المنطق الرياضي المعاصر عن المنطق الكلاسيكي القديم الذي امتد تطوره مايقرب من الفي عام هو تأكيد صلة المنطق المعاصر بالرياضيات من جهة واستخدامه لاسلوب التدوين الرمزي Symbolization من جهة اخرى . فمن المعروف أن انواع الاستدلالات Deductions التي يوفرها المنطق الرياضي ليست ضرورية للرياضيات فحسب ، بل وذات اهمية كبيرة لكافة العلوم الطبيعية والاجتماعية . فالقوانين المنطقية المتنوعة والتي بواسطتها يتم الانتقال بسلامة ومن دون حدوث متناقضات من المقدمات الى النتائج هي القوانين التي لايستغني عنها أي علم من العلوم يستخدم الاستدلال واستنتاج النتائج الصحيحة من مقدمات مفروضة .

وليست الصلة بين المنطق والرياضيات قريبة العهد ، بل انها تمتد الى البدايات الاولى التي شهدت محاولات البرهان في العلم الرياضي وفروعه (في علم الهندسة ، ايام اليونان) وضرورة الاعتماد عليه لاثبات صحة قضية هندسية من دون حاجة الى اثبات ذلك عمليا او تجريبيا اوعلى صعيد الواقع ، بل الاكتفاء فقط بالانتقال من مقدمات صحيحة او صادقة مختارة ومفروضة الى نتائج صحيحة او صادقة لازمة عنها منطقيا بالضرورة .

ومن الطبيعي ان تتمتن الصلة بين الرياضيات والمنطق كلما تقدمت الرياضيات في سلم التطور ، وانتجت فروعا او نظريات جديدة . ولعل ابرز مثال على هذه الصلة ماخلفه ارسطو (٣٨٤–٣٢٢ ق . م) من آثار منطقية احتواها كتاب "الاورغانون Organon" تشهد على امكانية ارسطو في تحليل العلم الرياضي ومايجب ان يكون عليه ، واستخلاص النظرية الاستدلالية التي عرفت بالقياس Syllogism ، حيث اقام للرياضيات نظرية منطقية تجمع الاستدلالات والبراهين الضرورية بالاضافة الى الشروط والمعايير التي يجب ان يستوفيها البرهان الصحيح ، حاجته الى التعريفات والمقدمات الضرورية والاستنتاج المنطقي على أساس ان صدق المقدمات يؤدي الى صدق النتائج بالضرورة .

وعلى الرغم من عدم حدوث تطورات كبيرة في منطق ارسطو، الا ان التطور اصاب علم الرياضيات، فظهرت فروع جديدة وتطورات اخرى، واستطاع العلم الرياضي ان يبدأ مسيرته الصحيحة في الانتقال من استخدام لغة الحياة اليومية الى لغة التدوين الرمزي فتصبح اللغة الجديدة اكثر مرونة وادق في التعبير عن الحقائق الرياضية. وكان علم الجبر من اكثر الفروع الرياضية استخداما لاسلوب التدوين الرمزي.

لقد أبدع العلماء العرب علم الجبر واستخدموا لغة الحياة اليومية لحل كثير من العمليات الرياضية المعقدة على الرغم من صعوبة هذه اللغة في التعبير عن الحقائق الرياضية اذا ماقورنت باللغة الرمزية في الجبر ولتوضيح مانذهب اليه نختار المثال الجبري الاتي:

مثال: اضرب ثلاثة اموال وجذرين واربعة دراهم في مالين وثلاثة اشياء وخمسة دراهم. قياسه: ان تضرب ثلاثة اموال في مالين: يكون ستة اموال مال. ثم في ثلاثة اشياء: تكون تسعة كعوب. ثم في خمسة آحاد: تكون خمسة عشر مالا. ثم اضرب الجذرين في المالين: تكون اربعة كعوب، ثم في ثلاثة اشياء: تكون ستة اموال. ثم خمسة احاد: تكون عشرة اشياء. ثم أضرب أربعة آحاد في مالين: تكون ثمانية أموال. ثم في ثلاثة أشياء. يكون اثنى عشر شيئاً. ثم في خمسة آحاد: يكون عشرين احدا. فاذا جمعت ذلك كله يكون ستة اموال مال وثلاثة عشر كعبا وتسعة عشر كعبا وعشرين مالا، واثنتين وعشرين جذرا وعشرين احدا[1].

فاذا علمنا ان المال=س^{٢}، وان الشيء=س، وان الاحاد هي الاعداد، تكون النتيجة بلغة الجبر الحديث بالصورة الاتية: –

مثال: (٣س^{٢}+٢س+٤)(٢س^{٢}+٣س+٥)

قياسه: ٣س^{٢}×٢س^{٢}=٦س^{٤}، ٣س^{٢}×٣س=٩س^{٣}، ٣س^{٢}×٥=١٥س^{٢}.

٢س × ٢س^{٢} = ٤س^{٣}، ٢س × ٣س = ٦س^{٢}، ٢س × ٥ = ١٠س

٤ × ٢س^{٢} = ٨س^{٢}، ٤ × ٣س = ١٢س، ٤ × ٥ = ٢٠

اذا جمعت ذلك كله يكون: –

٦س^{٤}+٩س^{٣}+١٥س^{٢}+٤س^{٣}+٦س^{٢}+١٠س+٨س^{٢}+١٢س+٢٠

٦س^{٤}+١٣س^{٣}+٢٩س^{٢}+٢٢س+٢٠

١) ياسين خليل، التراث العلمي العربي ص ١٩٠. (مطبعة جامعة بغداد ١٩٨٠)

فالمؤلفات الجبرية ابتداءً من كتاب الخوارزمي في الجبر والمقابلة وانتهاءً بالمؤلفات المتأخرة في المشرق لم تستخدم طريقة رمزية لمفاهيم ومعادلات الجبر. ولكننا نواجه استثناءً في المغرب العربي يتجلى في رسالة حسابية جبرية هي "كشف المحجوب في علم الغبار" لمؤلفها ابو الحسن علي بن محمد القلصاوي (ت/١٤٨٦م) والتي احتوت على محاولة فريدة في تدوين الجبر وتضم الرسالة على العموم موضوعات حسابية وجبرية، فتناول في قسمها الاول موضوع الاعداد، بينما اهتم في قسمها الثاني بالكسور. اما القسم الثالث فانه اختص في استخراج الجذور، ويتناول في القسم الرابع موضوع حل المعادلات.

ولكن الذي يهمنا هنا هو طريقة التدوين الرمزي كما طرحها القلصاوي، فنبدأ بالمفاهيم الجبرية. فن المعروف ان الجبر العربي يتألف من مفاهيم مثل الجذور والمال والشيء وغير ذلك، اضافة الى الاعداد والكسور، وماتحتاج اليه المعادلات الجبرية المختلفة فبالنسبة للجذر التربيعي نجد القلصاوي يختار الحرف الاول – ج من الكلمة العربية جذر ويضع هذا الحرف فوق العدد للدلالة على الجذر التربيعي للعدد مثال ذلك: –

$\overset{ج}{\overline{12}}$ لتعني $\sqrt{١٢}$، $\overset{ج}{\overline{60}}$ لتعني $\sqrt{٦٠}$

ويستخدم الحرف ش وهو الحرف الاول من الكلمة العربية شيء للدلالة على المجهول مثال ذلك: –

ش$_{8}$ لتعني ٨س، ش$_{12}$ لتعني ١٢س

ويستخدم الحرف م وهو الحرف الاول من الكلمة العربية مال للدلالة على س^{٢}. مثال ذلك: –

م$_{1}$ لتعني مالاً واحداً س^{٢}، م$_{6}$ لتعني ستة اموال ٦س^{٢}

ونختار هنا معادلتين جبريتين لبيان طريقة التدوين الجبري للقلصاوي علما ان الرمز ل وهو اللام يشير الى المساواة وهو مأخوذ من آخر الكلمة يعدل.

م$_{1}$ ل ش$_{20}$ لتعني س^{٢}=٨س+٢٠

م$_{1}$ ش$_{10}$ لتعني س^{٢}+١٠س=٥٦ [2]

2) Juschewitsch, A.P., Geschichte der Mathematik im Mittellter P:269 leipzig 1964.

وكان ابرز التطورات في التدوين الرمزي الاوربي في القرنين السادس عشر والسابع عشر، اذ ساهم عدد غير قليل في تطوير اللغة الرمزية في الجبر والعلوم الرياضية الاخرى وكان تأثير المنطق في هذه الدائرة كبيرا ، حيث نشأ فرع من فروع المنطق يطلق عليه اسم (الجبر المنطقي Algebra of logic) وكان من ابرز رواده جوتفريد فلهلم لايبنتز (١٦٤٦–١٧١٦) وجورج بول (١٨١٥–١٨٦٤) وارنست شرودر.

كانت محاولة لايبنتز في تطبيق الاسلوب الرياضي جديرة بالاهتمام ، حيث استخدم الرموز بقصد التعبير عن الحقائق المنطقية والفلسفية ، لانه وجد في الفلسفة صراعات ومتناقضات بين الفلاسفة سببها استخدام كل فيلسوف لغة فلسفية خاصة به ، وهي بلا شك لغة يكتنفها الغموض وغير قادرة على التعبير الدقيق واختلاف معنى الالفاظ المستخدمة فيها.[١]

فنادى بضرورة تأسيس لغة فلسفية رمزية عامة تصلح للتعبير الدقيق عن الافكار والمبادئ الفلسفية فيتحول الحوار او الجهد الفلسفي من المناظرة والمناقشة الى الحساب ، حيث يكون بمقدور الفيلسوف ان يحسب كما هو الحال بالنسبة لعالم الرياضيات.

واستطاع جورج بول ان يقيم حسابا منطقيا Logical Calculus على نمط علم الجبر ولكن باستخدام مفاهيم ومبادئ المنطق ، واستطاع بلغة جبرية منطقية جديدة ان يعبر عن حقائق المنطق القديمة والجديدة بصورة واضحة ليثبت جدارة اللغة الرمزية الجديدة. [١]

وهكذا برز الى الوجود نوع من انواع المنطق كان له الفضل في تطوير بقية الفروع المنطقية وتأسيس فروع منطقية اخرى. وتوسع ارنست شرودر في هذا الاتجاه ، فاكتملت عنده صورة الجبر المنطقي باستخدام فاعل للغة التدوين الرمزي. وابتدع جوتلوب فريجه (١٨٤٨–١٩٢٥) طريق جديدة في التدوين الرمزي للتعبير عن الحقائق المنطقية والرياضية وعلى الرغم من عدم شيوع هذه الطريقة بين الاوساط المنطقية الا انها بحق طريقة مبتكرة وجديدة. واخذت المدارس المنطقية وعلماء المنطق يبتكرون طرقا اخرى في التدوين الرمزي ، فنجد في الوقت الحاضر طريقة بيانو–رسل ، وطريقة وارشو البولندية وطريقة ديفيد هلبرت وغير ذلك.

ونظرا لتعدد المدارس المنطقية في طرق التدوين الرمزي ، فسوف نأخذ بطريقة بسيطة توسعت في الفترة الاخيرة حتى غدت عامة لدى المناطقة والفلاسفة وعلماء الرياضيات كما سنتناول الطرق التدوينية الاخرى لبعض المناطقة والمدارس المنطقية لاتزال تكتب المؤلفات المنطقية بها.

ومن اجل فهم جيد للغة التدوين الرمزي ، لابد لنا من تثبيت بعض الحقائق الضرورية اولاً ، وهي حقائق برزت لدى المناطقة كضرورة نتيجة لما ابتكروه من رموز وصيغ منطقية : –

اولا : يجب ان يكون لكل رمز نختاره في اللغة الرمزية مفهوم او معنى ثابت ، اذ لايجوز مطلقا استخدام رمز واحد لاكثر من معنى واحد متفق عليه ، اللهم الا في حالة المتغيرات Varibales ، التي هي مجرد رموز ليس لها معنى ثابت ويمكن ان يحل محلها أي رمز له معنى ثابت.

ثانيا : تترابط الرموز البسيطة على وفق اسلوب او قواعد بنائية معينة لبناء الجمل والعبارات والقضايا البسيطة والمركبة وغيرها ، ولانسمح على وفق القواعد كذلك بترابط الرموز كيفما اتفق ، لان من الاصول الثابتة في لغة المنطق ان تكون الصيغ بانواعها المختلفة صحيحة البناء سواء اكانت مقدمات او مبرهنات أو قواعد استنتاجية.

٣– ونظرا للصفة البرهانية التي يتحلى بها المنطق ، فمن الضروري ان نختار من بين الصيغ صحيحة البناء صيغا اولية تعرف بالبديهيات Axioms وصيغاً اخرى ثانوية تعرف بالمبرهنات Theorems ، وتعمل قواعد الاستنتاج Rules of Lnference على ربط الصيغ والسماح باستنتاج صيغة صحيحة او صادقة من مقدمة او مقدمات مفروضة على وفق تلازم منطقي متين.

رابعا : ونظرا لتعدد نظريات المنطق الرياضي واختلاف كل فرع او نظرية عن الاخرى من جهة ، واعتماد نظرية على نظرية اخرى من جهة اخرى ، فاني أرى أن نقسم موضوع التدوين الرمزي حسب النظريات ، ونتعرف على معظم رموز كل نظرية ، ونكمل ماتبقى من رموزها اثناء العمل المنطقي ولقد جرت العادة ان تقسم موضوعات المنطق الى مايأتي :

أ. منطق او نظرية القضايا Theory of Propositions

ب. منطق او نظرية دالات القضايا Theory of Propositional Functions

اوكما تدعي احيانا بمنطق او نظرية المحمولات Theory of Predicates

ج. منطق او نظرية المجموعات او الفئات Theory of sets or Classes

د. منطق او نظرية العلاقات Theory of Relations

الفصل الاول

نظرية القضايا

المبحث الاول : الروابط المنطقية :

تشكل نظرية القضايا في المنطق مجموعة المرتكزات الضرورية التي تقوم عليها نظرية الاستدلال Theory of Deduction ، فهي ضرورية للنظريات المنطقية الاخرى او لايمكن الاستغناء عنها في البراهين المنطقية.

ولاجل توضيح هذه الحقيقة نتعرف في البداية على ابجديتها ثم تراكيبها وصيغها المركبة. وذلك من خلال استخدام التعريفات من ناحية ورسم الرموز الخاصة بها من ناحية اخرى. واستخدام جداول القيم Truth – Tables من ناحية ثالثة ، وتثبيت قواعد البناء من جهة رابعة ، وادراج بعض البراهين البسيطة للتوضيح من جهة خامسة. ونبدأ اولا بتعريف القضية تمييزا لها عن بقية التراكيب اللغوية المستخدمة عادة في لغة الحياة اليومية مثل الجمل بانواعها المختلفة والعبارات الناقصة وغيرها.

لم يرد بالدراسه

تعريف (١)

القضية : قول مفيد يحتمل الصدق أو الكذب أو انها عبارة ذات معنى تحتمل الصدق أو الكذب

لقد استبعدنا من التعريف جميع الابنية أو التراكيب اللغوية الاخرى مثل الجمل سواء كانت استفاهمية أو تعجبية أو امرية او غير ذلك، لان خاصية الصدق أو الكذب غير متوفرة في الجمل وأستبعدنا كذلك العبارات الناقصة للسبب ذاته، خاصة وانها تحتاج الى مايكملها لكي تصبح قضية فنحكم عليها بالصدق او بالكذب مثال ذلك قولنا: "رئيس الجمهورية العراقية" او "مؤلف رسالة الغفران".

والتعريف بحد ذاته ينطوي اضافة الى خاصيتي الصدق والكذب على اللفظ "قول مفيد" وقصدنا منه ان القضية ليست مجرد ترتيب للالفاظ، بل انها تشكل وحدة لغوية ذات معنى تام ومفيد. اما اذا كانت القضية عبارة لاتنطوي على هذا الشرط فلا تعد قضية من وجهة النظر المنطقية. اضف الى ذلك ان تحديد القضية بهذا الشكل يجعلنا نفكر مليا، بان التعريف لايشتمل على القضايا المعروفة في لغة الحياة اليومية فحسب، بل يتعدى ذلك الى جملة القضايا المستخدمة في العلوم ايضاً، خاصة اذا علمنا أن العلوم لاتشغل الا على القضايا الصادقة، وان صلة المنطق بالعلوم وثيقة سواء كانت هذه العلوم برهانية أو تجريبية في مجال العلوم الأنسانية او الطبيعية.

ولتوضيح مانذهب اليه نطرح الامثلة الاتية: -

الغزالي فيلسوف عربي ،	سقراط مهندس معماري
اذهب خارج الغرفة ،	لماذا تتحرك الافلاك حركة بيضوية؟
هل اكتشفت ذلك بمفردك!	
٢+٢=٤ ،	المستقيم ليس مجموعة جزئية في مستو.

الهيدروجين اخف وزنا من الكاربون، يسير الضوء بخطوط مستقيمة في كافة الاوساط.

القضية "الغزالي فيلسوف عربي" صادقة، بينما القضية "سقراط مهندس معماري" قضية كاذبة. اما الجملة "اذهب الى الغرفة" فانها جملة امرية وليست قضية، والجملة لماذا تتحرك الافلاك حركة بيضوية؟ "جملة استفهامية وليست قضية، والجملة "هل اكتشفت ذلك بمفرك" جملة تعجبية وليست قضية. وما تبقى قضايا من الرياضيات.

يركز المنطق اهتمامه على القضايا سواء اكانت في حقل العلوم او في الحياة اليومية، ويهمل الانواع الاخرى من الجمل التي يهتم بدراستها علم النحو في الابحاث اللغوية. وفي سبيل ان نخطو الخطوة الاولى نحو التدوين الرمزي للقضايا يجب ملاحظة حقيقة مهمة هي ان القضية في نظرية القضايا وحدة واحدة نختار لها رمزا منطقيا مفردا من غير الاشارة الى التركيب الداخلي لها، وهذا معناه ان سلوك القضية في نظرية القضايا يعتمد على كونها وحدة غير مجزأة من جهة وعلاقتها مع القضايا الاخرى من جهة اخرى.

كما اننا نتعامل معها على اساس انها متغير Variable في صيغة منطقية، وليس لنا علاقة بالدلالة التي قد تشير اليها. الا انه حسب التعريف: اما ان تكون صادقة او كاذبة لتعيين قيمة القضية من خلال جداول القيم، وذلك على اساس ان هذه القيم افتراضية وضرورية كمفاهيم منطقية.

نختار في الخطوة الاولى مجموعة من الحروف الابجدية الكبيرة على اساس انها متغيرات قضايا Propositional Variables، مثل: -

ق، ل، م، ن

ولما كنا نتعامل مع منطق ثنائي القيمة Two Valued Logic، فان لكل قضية بناء على ذلك قيمتين، ويمكن التعبير عنها بالصورة الاتية: -

ق (ص، ك)، ل (ص، ك)

م (ص، ك)، ن (ص، ك)

ولكن اللغة العلمية او لغة الحياة اليومية لاتتكون من قضايا بسيطة، بل ان بعضها يرتبط ببعض بروابط منطقية Logicl Connectives ولغوية من اجل بناء قضايا مركبة. والفرق بين القضية البسيطة والقضية المركبة يمكن ملاحظته من خلال التعريف: -

تعريف (٢)

القضية المركبة :	قضية يمكن تجزئتها الى قضايا ابسط منها ،
وبعبارة اخرى :	انها قضية تتكون من اكثر من قضية بسيطة واحدة .

تعود علماء المنطق على تقديم قائمة من الروابط المنطقية التي تقوم بربط القضايا البسيطة بعضها ببعض ، ومن هذه الروابط مالا يقوم بالربط ، بل يعمل على قلب قيمة القضية فاذا كانت صادقة اصبحت بفضله كاذبه ، واذا كانت كاذبة اصبحت بفضله صادقة ، وهذه الرابطة احادية تسمى النفي ، وتعريفها كما يأتي : -

تعريف (٣)

¬ ق : النفي :	رابطة منطقية احادية تقلب قيمة القضية التي تدخل عليها فاذا كانت ق صادقة اصبحت بعد سبقها بالنفي كاذبة ، واذا كانت ق كاذبة اصبحت بعد سبقها بالنفي صادقة .

فاذا اخترنا القضية : "سقراط يوناني" صادقة ، فان نفيها قضية كاذبة فيقال ؛ - "ليس سقراط يونانيا" أو "سقراط ليس يونانيا" ولذا اخترنا قضية كاذبة : $\sqrt{٨}=٣$ فان دخل عليها النفي اصبحت صادقة : ¬ ($\sqrt{٨}=٣$) اي ؛ ليس $\sqrt{٨}=٣$ او $\sqrt{٨} \neq ٣$ اي $\sqrt{٨}$ لايساوي ٣ .

ومن الروابط المنطقية البدل Alternative وهو على نوعين البدل والبدل المطلق ، . ولكل منها معناه المنطقي الذي تحدده جداول القيم ، ويسمى البدل المطلق اصطلاحا بالانكليزية Disjunction ، ولكننا نجد من الكتب المنطقية الذي يكتفي بالبدل المطلق واصطلاحه على اساس انه البدل . ولكل من البدلين تعريفه حسب معناه ، ونبدأ اولا بتعريف البدل ، ثم نعقبه بتعريف البدل المطلق لاظهار الاختلاف بينها في المعنى المنطقي واللغوي على حد سواء ثانيا .

تعريف (٤)

البدل ، (ورمزه المنطقي ٧) رابطة اثنينية تقوم بربط قضية باخرى مكونة قضية جديدة ومركبة تكون صادقة في الحالات الاتية : -
عند صدق كل من القضيتين ق و ل
عند صدق ق وكذب ل
عند كذب ق وصدق ل
وتكون كاذبة عند كذب القضيتين معاً ق و ل

ان الفرق بين البدل والبدل المطلق في لغة الحياة اليومية يمكن في استخدام كل واحد منها بطريقة مختلفة ، فالبدل يعبر عنه عادة "...... او ......" في حين يعبر عن البدل المطلق مادة : "اما ... او ..." والفرق بينها من حيث الصدق والكذب . فالصدق لايجتمع في البدل المطلق ، فلا تكون القضية ذات البدل المطلق صادقة عند صدق القضايا المكونة لها . ونرمز للبدل المطلق بالرمز $\underline{٧}$ وتكون تعريفه كما يأتي : -

تعريف (٥)

البدل المطلق (ورمزه $\underline{\vee}$) رابطة منطقية اثنينينية تقوم بربط قضية باخرى مكونة قضية جديدة ومركبة تكون صادقة في الحالات الاتية :
عند صدق القضية ق وكذب القضية ل
عند كذب القضية ق وصدق القضية ل
وتكون كاذبة في الحالات الاتية : –
عند صدق كل من القضيتين ق و ل معاً
عند كذب كل من القضيتين ق و ل معاً

ولبيان دورهما المنطقي نطرح بعض الامثلة من لغة الحياة اليومية ولغة الرياضيات .

مثال على البدل : افلاطون فيلسوف يوناني او افلاطون استاذ سقراط [ص، ص]

٣+٣=٦ أو ٢×٣=٦ [ص ، ص]

مثال على البدل المطلق : اما العدل اساس الملك او الظلم سيد الاحكام

اما √٩=٤ أو √٩=٣

[ص ، ك]

[ك ، ص]

فمن الواضح ان الامثلة السابقة تشير الى ان الصدق لايجتمع في البدل المطلق ، ولكنه يجتمع في البدل ، لان على احدى القضيتين في البدل المطلق ان تكون صادقة والاخرى كاذبة ويجب ان نلاحظ كذلك انه ليس من الضروري ان تكون علاقة ضمنية بين القضية الاولى والقضية الثانية لان المسألة برمتها تعتمد على صدق اوكذب القضايا المكونة للقضية المركبة . وهذا معناه مثلا ان القضية : "اما ٣×٢=٤ أو افلاطون يوناني" قضية بدلية مطلقة لاغبار عليها من الناحية المنطقية .

ومن الروابط المنطقية الاخرى في لغة التدوين الرمزي رابطة العطف

التي يعبر عنها لغويا بالصورة الآتية : "... و ..." وتسمى القضية الجديدة بعد ربط قضيتين او اكثر بالقضية العطفية ، وفيما يلي تعريف لهذه الرابطة : –

تعريف (٦)

العطف (ويرمز له بالرمز ∧) : رابطة منطقية اثنينينية تقوم بربط قضية باخرى مكونة قضية عطفية ، تكون صادقة في حالة واحدة عند صدق القضايا المكونة لها ، وتكون كاذبة في الحالات التالية : –
عند صدق ق وكذب ل
عند كذب ق وصدق ل
عند كذب ق وكذب ل معاً

ومن الامثلة التي نسوقها على هذه الرابطة مايأتي : –

ابن الهيثم عالم فيزياوي	وابن البيطار طبيب عربي	[ص ، ص]
ابن النديم مؤرخ عربي	وابن النفيس طبيب يوناني	[ص ، ك]
٢ √٤=٦	و ٣ √٩=٩	[ك ، ص]
٣×٣=٨	و ٤×٣=١٢	[ك ، ك]

ومن الروابط المنطقية المهمة في لغة التدوين الرمزي رابطة الشرطية او رابطة الالزام Lmplication ، وهي تربط بين قضية واخرى مكونة قضية جديدة ومركبة نطلق عليها اسم "القضية الشرطية" ، وتسمى القضية التي تسبق رمز الشرطية بالسابقة ، والقضية التي تلي رمز الشرطية باللاحقة . وتعرف الشرطية بالصورة الآتية : –

تعريف (٧)

اذا ... كان

الشرطية (ونرمز لها بالرمز ←)/رابطة منطقية ثنينية تقوم بربط قضية باخرى مكونة قضية جديدة ومركبة تكون كاذبة في حالة واحدة فقط عند صدق السابقة وكذب اللاحقة. وتكون صادقة في الحالات التالية :-
عند صدق السابقة وصدق اللاحقة.
عند كذب السابقة وصدق اللاحقة.
عند كذب السابقة وكذب اللاحقة معا.

ومنعا للالتباس من الضروري ان نميز بين الشرطية والاستنتاج المباشر والسببية. فليس ضروريا ان تكون هنالك علاقة ضمنية بين القضية السابقة في القضية الشرطية والقضية اللاحقة فمن الوجهة المنطقية ان القضية الشرطية "اذا ٢+٢=٤ فان افلاطون يوناني" قضية صادقة وسليمة منطقياً، وان لم يكن بين السابقة واللاحقة صلة معنى. اما بالنسبة للاستنتاج المباشر، فمن الضروري ان تكون بين القضية السابقة واللاحقة صلة معنى مثال ذلك : اذا كان كل عراقي اسيوياً فأن الرصافي اسيوي، اما بالنسبة للسببية فمن الضروري كذلك ان تكون بين القضية السابقة واللاحقة صلة يعينها الحدث تتابعاً وتكراراً، فنقول على سبيل المثال :

اذا انقطع التيار الكهربائي، توقف المصنع عن العمل.
ونختار من الامثلة على الشرطية المنطقية مايأتي :-

اذا كان رسل فيلسوفا رياضياً فأن وايتهيد فيلسوف طبيعي [ص ، ص]
اذا كان الكندي فيلسوفا عربيا فان ارسطو ايطالي [ص ، ك]
اذا ٢=٢ فأن $٢^{٢}=-٢^{٢}$ [ك ، ص]
اذا ٣×٣=٨ فأن ٣+٣=٨ [ك ، ك]

والرابطة المنطقية الاخرى في نظرية القضايا هي التكافؤ Equivalence، او المساواة ويعبر عنها لغوياً ..... اذا وفقط اذا ..... ونرمز لها عادة بالرمز ↔ وتربط بين قضية واخرى مكونة قضية جديدة ومركبة، وتعرف هذه الرابطة بالصورة الآتية :-

تعريف (٨)

اذا وفقط اذا

التكافؤ (ونرمز له بالرمز ↔) رابطة منطقية اثنينية تقوم بربط قضية باخرى مكونة قضية جديدة ومركبة هي قضية تكافؤية، تكون صادقة في حالتين :-
عند صدق القضايا المكونة لها
عند كذب القضايا المكونة لها
وتكون القضية التكافؤية كاذبة في الحالات الآتية :-
عند صدق القضية ق وكذب القضية ل
عند كذب القضية ق وصدق القضية ل

ومن الضروري التمييز بين المساواة او التكافؤ كرابطة بين القضايا والمساواة العددية المستخدمة في الرياضيات، فبينما تربط الاولى بين القضايا فلا شأن للمساواة العددية بالقضايا، بل تختص بالحدود والاعداد بالذات. ولتوضيح مانذهب اليه نطرح الامثلة الآتية :-
أينشتاين عالم اذا وفقط اذا كانت دولة المانيا النازية مستقلة.
١٢=٧+٥

في المثال الاول تكون القضية صادقة لان القضايا المكونة لها في حالة الصدق بغض النظر عن عدم وجود صلة معنى بينهما. فالقضيتان في القضية المركبة الاولى متكافئتان في قيمة الصدق اما المثال الثاني فان المساواة واقعة بين الطرف الأيمن الذي هو ليس قضية والطرف الثاني الذي هو ليس بقضية كذلك، وعلى الرغم من ذلك فان المساواة واقعة بين الاعداد، فحاصل جمع ٥ و ٧ يساوي بالفعل (١٢) والقضية جميعها صادقة وهي قضية واحدة فقط.
ونختار من الامثلة على التكافؤ مايأتي :-

العرب امة واحدة اذا وفقط اذا العلماء اذكياء [ص ، ص]
المعادن فلزات اذا وفقط اذا الاشرار فقهاء [ص ، ك]

$\sqrt{9} = 4$ اذا وفقط اذا $\sqrt{4} = 2$ [ك ، ص]

$4^2 = 12$ اذا وفقط اذا $4 \times 4 = 12$ [ك ، ك]

(١٣)

واعتادت كتب المنطق الحديث على التعبير عن الروابط المنطقية او تحديد معانيها وادوارها او وظائفها المنطقية بواسطة جداول القيم او جداول الصدق ، وهي طريقة بسيطة بلا شك ، ويمكن استخدامها لكل رابطة . وجرياً على ما أعتادت عليه كتب المنطق نتناول الروابط التي سبق ذكرها بطريقة جداول القيم وهي بالترتيب كما يأتي : –

رابطة النفي

ق	$\sim$ ق
ص	ك
ك	ص

اذا كانت القضية ق صادقة ، فانها بفعل النفي تتحول الى قضية كاذبة ، واذا كانت القضية ق كاذبة ، فانها بفعل النفي تتحول الى قضية صادقة .

جدول رابطة البدل

ق	ل	ق $\vee$ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

تكون القضية البدلية ق $\vee$ ل كاذبة في حالة واحدة فقط عند كذب كل من ق و ل معاً ، وتكون صادقة في جميع الحالات الاخرى : –

جدول رابطة البدل المطلق

ق	ل	ق $\underline{\vee}$ ل
ص	ص	ك
ص	ك	ص
ك	ص	ص
ك	ك	ك

تكون القضية البدلية المطلقة صادقة عند صدق ق وكذب ل ، وعند كذب ق وصدق ل ، وتكون كاذبة في الحالات الاخرى .

جدول رابطة العطف

ق	ل	ق $\wedge$ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ك

تكون القضية العطفية صادقة في حالة واحدة عند صدق كل من ق و ل معا ، وتكون كاذبة في الحالات الاخرى .

جدول رابطة الشرطية

ق	ل	ق $\rightarrow$ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص