## Differential Equations: المعادلات التفاضلية

## أولاَ: معادلة تفاضلية قابلة للفصل Separable Equation

و هي معادلة تتوفر فيها إمكانية جمع كل حدود $y$ مع $dy$ من جهة وكل حدود $x$ مع $dx$ من جهة ثانية.

$$Ex: \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{y}{\mathrm{x}}$$

$$y\,dx = x\,dy \;\Longrightarrow\; \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = ln|x| + c \;\Longrightarrow\; ln|y| - ln|x| = c$$

$$\ln\frac{|y|}{|x|} = c \;\Longrightarrow\; \frac{|y|}{|x|} = e^{c}$$

$$|y| = |x|\,e^{c} = |x|\,c_1 \;\Longrightarrow\; y = \pm\,|x|\,c_1$$

## ثانياَ: المعادلة التفاضلية المتجانسة Homogeneous Diff. Equ.

**Ex:** $(x+y)\,dx - x\,dy = 0$

$M = x + y$ متجانسة من الدرجة الأولى
$N = -x$ متجانسة من الدرجة الأولى

$\therefore$ المعادلة أعلاه متجانسة من الدرجة الاولى

$$v = \frac{y}{x} \implies y = v\,x \implies \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} - - - (1)$$

$$(x+y)\,dx - x\,dy = 0 \implies (x+y)\,dx = x\,dy \implies \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} - -(2)$$

$$from\ equ.1\ and\ 2: \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+vx}{x} = 1 + \cancel{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = 1 \implies \int dv = \int \frac{1}{x}\,dx \implies v = ln|x| + c$$

$$\frac{y}{x} = ln|x| + c \implies y = x(ln|x| + c)$$

**Exact Diff. Equ.** ثالثاَ: المعادلة التفاضلية التامة

$Ex:\quad (x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} M &= (x^2+y^2) \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ N &= 2xy \implies \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \end{aligned}\right\}$$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية تامة

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = x^2+y^2 \implies \int \partial f = \int (x^2+y^2)\,\partial x$$

$$f = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + g(y) \implies \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx + \acute{g}(y) \;---\;(1)$$

$$\because \frac{\partial f}{\partial y} = N = 2xy \;---\;(2)$$

$$from\ equ.1\ and\ 2: \quad 2yx + \acute{g}(y) = 2xy \implies \acute{g}(y) = 0$$

$$\acute{g}(y) = 0 \implies \frac{dg(y)}{dy} = 0 \implies g(y) = c$$

$$\therefore f = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + c$$

***Ex***: $\frac{dy}{dx} + y = e^x$

$$P(x) = 1 \;, \qquad Q(x) = e^x$$

$$\rho = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = e^{\int \mathrm{d}x} = e^x$$

$$y = \frac{1}{\rho}\int \rho\, Q\, dx + c \quad \Rightarrow y = \frac{1}{e^x}\int e^x\, e^x\, dx + c$$

$$\Rightarrow y = e^{-x}\int e^{2x}\, dx + c \quad \Rightarrow y = e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x} + c)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}e^x + e^{-x}c$$

**Ex**: $y\dfrac{dx}{dy} + 2x = y^3$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = y^2 \quad , \qquad \mathrm{p} = \frac{2}{y} \ , \qquad Q = y^2$$

$$\rho = e^{\int \frac{2}{y}\,\mathrm{dy}} = e^{2lny} = e^{ln\,y^2} = y^2$$

$$x = \frac{1}{y^2}\int y^2\, y^2\, dy + c$$

$$x = \frac{1}{y^2}\left(\frac{y^5}{5} + c\right) \Longrightarrow \frac{y^5}{5} + \ \frac{c}{y^2}$$

## حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الثانية 2nd D.E:

Ex: 1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 6x - 2$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int (6x - 2)dx$$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + c_1$ اصبحت معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى

$$\int dy = \int (3x^2 - 2x + c_1)\, dx$$

$$y = x^3 - x^2 - x + c_1 x + c_2$$

***Ex***: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

$r^2 + r - 2 = 0$

$(r-1)(r+2) = 0 \implies r_1 = 1 \ , \qquad r_2 = -2$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

***Ex***: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0 \implies (r+2)^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = -2$

$y = (c_1 x + c_2) e^{-2x}$

## المصفوفات Matrices:

المصفوفة matrix : هي نظام مكون من مجموعة من العناصر ( أعداد أو دوال ) مرتبة في صفوف (m) وأعمدة (n) وعلى شكل مستطيل أو مربع وتكتب بالصورة التالية:

$$\begin{array}{cccccc} & C_1 & C_2 & & C_n & \\ A = & \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array}\right. & \begin{array}{c} a_{12} --- \\ a_{22} --- \\ \vdots \\ a_{m2} ----- \end{array} & & \left.\begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array}\right] & \begin{array}{c} R_1 \\ \mathrm{R}_2 \\ \\ \mathrm{R}_\mathrm{m} \end{array} \end{array}$$

المصفوفة أعلاه من الدرجة $(m \times n)$ تحوي m من الصفوف و n من الأعمدة.

العنصر $a_{\mathrm{ij}}$ هو العنصر الذي يقع في الصف i والعمود j .

## ١- المصفوفة المربعة Square Matrix

هي مصفوفة يكون عدد صفوفها m مساوي الى عدد أعمدتها n أي ان $(m = n)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 9 & 11 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

قطر رئيسي قطر ثانوي

## ٢- المصفوفة الصفرية Zero matrix

وهي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفاراً ويرمز لها بالرمز $A = (0)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

## ٣- المصفوفة الواحدية Identity or Unite matrix

وهي مصفوفة مربعة تكون عناصر قطرها الرئيسي مساوي للعدد الواحد وبقية عناصرها أصفاراَ.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ٤- المصفوفة القطرية Diagonal matrix

وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها التي لا تقع على القطر الرئيسي أصفاراَ.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

علماَ ان المصفوفة الواحدية هي حالة خاصة من المصفوفة القطرية

## ٥- المصفوفة المثلثية Triangular matrix

**أ- المصفوفة المثلثية السفلى :** وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها التي تقع فوق القطر الرئيسي أصفاراَ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

**ب- المصفوفة المثلثية العليا :** وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها التي تقع تحت القطر الرئيسي أصفاراَ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

## ٦- مدور المصفوفة Transpose of matrix

يقال للمصفوفة $(A^T)$ بأنها مدور المصفوفة $(A)$ اذا كانت صفوف $(A)$ هي أعمدة $(A^T)$ وأعمدة $(A)$ هي صفوف $(A^T)$

أي ان اذا كانت $A_{m\times n}(\mathrm{a_{ij}})$ فان $A^{\mathrm{T}}_{n\times m}(\mathrm{a_{ji}})$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

## ٧- المصفوفة المتناظرة Symmetric matrix

هي مصفوفة مربعة تكون العناصر المتناظرة مع القطر الرئيسي متساوية أي ان $a_{ij} = \mathrm{a_{ji}}$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: مدور المصفوفة المتناظرة يساوي المصفوفة المتناظرة نفسها.

## ٨- المصفوفة المتناظرة المتخالفة Antisymmetric Matrix

هي المصفوفة التي تكون عناصرها تساوي سالب مدور المصفوفة $(-A^T)$ أي ان $a_{ij} = -a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$