$$Ex: \quad \lim_{x \to b} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{b^2+1}}{x-b}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to b} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{b^2+1}}{x-b} \times \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{b^2+1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{b^2+1}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to b} \frac{x^2+1-b^2-1}{(x-b)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{b^2+1}\right)} \quad \Longrightarrow \lim_{x \to b} \frac{x^2-b^2}{(x-b)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{b^2+1}\right)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to b} \frac{(x+b)(x-b)}{(x-b)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{b^2+1}\right)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to b} \frac{(x+b)}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{b^2+1}\right)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to b} \frac{(b+b)}{\left(\sqrt{b^2+1} + \sqrt{b^2+1}\right)}$$

$$\Longrightarrow \frac{2b}{2\sqrt{b^2+1}} \Longrightarrow \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}$$

تمارين: جـــد الغاية إن وجدت

$$Ex: 1. \quad \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \quad , \qquad x \neq 0$$

$$|x| = \begin{cases} +x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{+x}{x} = +1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \Longrightarrow \text{الغاية غير موجودة}$$

$$+1 \neq -1$$

$$Ex: 2. \quad Find \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \geq 1 \\ x + 1 , & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} (x^2) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x) \Rightarrow \quad 1 \neq 2$$ الغاية غير موجودة

الغـــاية اللانهائية Infinite limit

اذا ازدادت قيمة f(x) بالاتجاه الموجب أو السالب ولم تتوقف إلى حد معين وذلك عندما تقترب (x) من (a) من كلا الاتجاهين فنقول إن غاية الدالة تقترب من اللانهاية الموجبة أو السالبة وتكتب بالصيغة التالية:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \ , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Ex: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ غاية غير موجودة

$$Ex: \quad \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$

نجد غايــة اليمين

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{+x}}} \Rightarrow \frac{2}{1+2^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

نجد غاية اليسار

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1+2^{-\frac{1}{x}}} \Rightarrow \frac{2}{1+2^{-\infty}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow \quad 0 \neq 2$ الغاية غير موجودة

$$Ex: \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5}{3x^2+5x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} \Longrightarrow \frac{1-0}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$Ex: \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x+1}{2x^5} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^5}+\frac{x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{\frac{2x^5}{x^5}} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{0+0+0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$Ex: \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{2x^2+4x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{4}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$Ex: \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2-5x+4}}{2x-7} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(3-\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2})}}{x(2-\frac{7}{x})} \implies \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2})}}{x(2-\frac{7}{x})}$$

$$\implies \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}{\left(2-\frac{7}{x}\right)} \implies \frac{\sqrt{(3-\frac{5}{\infty}+\frac{4}{\infty})}}{(2-\frac{7}{\infty})}$$

$$\implies \frac{\sqrt{(3-0+0)}}{(2-0)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

جـــد الغاية ان وجدت لكل مما يلي:

(1). $\lim_{x\to 0} \dfrac{3}{2+0.4^{\frac{1}{x}}}$

(2). $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+3^{\frac{1}{x}}}{1-3^{\frac{1}{x}}}$

(3). $Find \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , -1 \le x < 1 \\ 3-x & , 1 \le x \le 2 \end{cases}$

(4). $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$

جـــد ناتج الغايات اللانهائية التالية:

(1). $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{4x^2+5}}$

(2). $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$

(3). $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-7x+5}{x^3-2x+1}$

(4). $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-x$