الفصل الأول: المتجهات (Vectors)

1.1 الكميات العددية (scalars) والكميات الاتجاهية (vectors) .

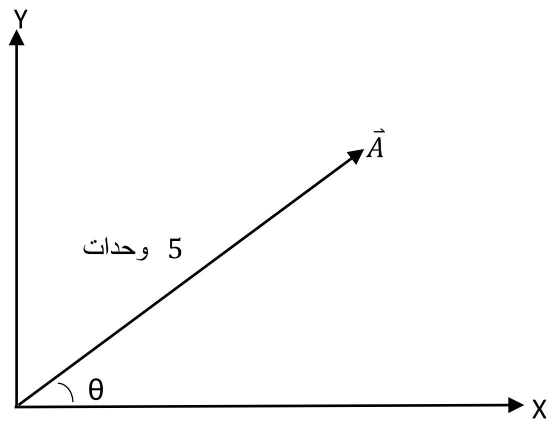
ان معرفة الكميات العددية والاتجاهية امراً أساسياً في الفيزياء، من حيث تحديد طبيعتها وسلوكها وكيفية اجراء العمليات الرياضية عليها، على وجه الخصوص تغير موقعها مع الزمن وتحديد بدايتها ونهايتها والزاوية التي تصنعها مع المحاور المتعامدة.

1-الكميات العددية Scalars: وهي الكميات التي يمكن وصفها من خلال ذكر مقدارها وكذلك وحدة قياسها فقط مثل (الشحنة q، الحجم V و الكتلة m ......) ويرمز لمقدارها بحروف مجردة.

2-الكميات الاتجاهية *Vectors*: وهي الكميات التي يمكن وصفها بمعرفة مقدارها واتجاهها معا مثل (القوة $\vec{F}$ ، الازاحة $\vec{S}$ والمجال الكهربائي $\vec{E}$ ...) وللتميز يرسم فوقها خط او سهم صغير .

1.1 تمثيل المتجهة.

تمثل الكمية الفيزيائية الاتجاهية بسهم يدل طوله على مقدار الكمية الاتجاهية واتجاهه باتجاه المتجه كما يوضح الشكل ادناه.



وحدة المتجه: هو متجه مقداره وحدة واحدة واتجاهه باتجاه المتجه الرئيسي أي يصنع نفس زاوية المتجه مع المحاور المتعامدة ويرمز له بالرمز $\vec{u}$.

وبالتالي يمكن وصف المتجه بدلالة وحدات المتجه

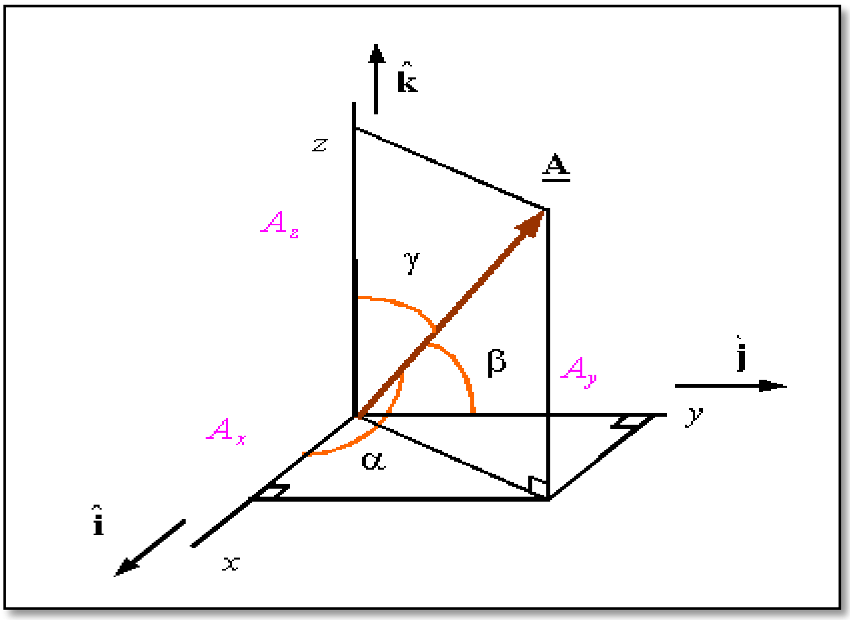
$$\vec{A} = A\,\vec{u} \qquad \ldots\ldots (1)$$

فأن وحدة المتجه

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \qquad \ldots\ldots (2)$$

بصورة عامة يمثل المتجهة بدلالة متجهات الوحدة المتعامدة للمحاور x, y, z كما يلي :-

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z \qquad \ldots\ldots (3)$$



جيوب تمام زوايا المتجه الرئيسي مع المحاور المتعامدة

$$\left.\begin{aligned} A_X &= A\cos(\alpha) \\ A_y &= A\cos(\beta) \\ A_Z &= A\cos(\gamma) \end{aligned}\right\}$$

اما القيمة المطلقة للمتجهة $\vec{A}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2} \qquad \ldots\ldots (4)$$

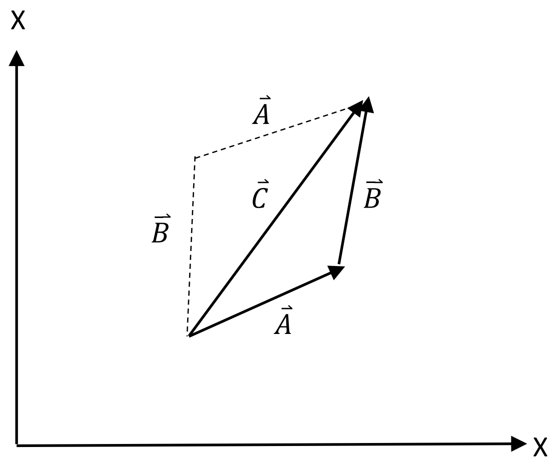
مثال: -إذا كان المتجه $\vec{B} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ احسب مقدار ووحدة المتجه .

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}}{3} = \frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} - \frac{1}{3}\vec{k}$$

1.3 جمع وطرح المتجهات



من الرسم نلاحظ ان المتجه $\vec{C}$ يمثل حاصل جمع المتجه $\vec{A}$ مع المتجه $\vec{B}$ والذي يمثل سهم مرسوم من بداية المتجه $\vec{A}$ الى نهاية المتجه $\vec{B}$ كذلك نلاحظ من الرسم ان عملية الجمع إبداليه.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad \ldots\ldots (5)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad \ldots\ldots (6)$$

إذا كان

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\vec{B} = \vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z$$

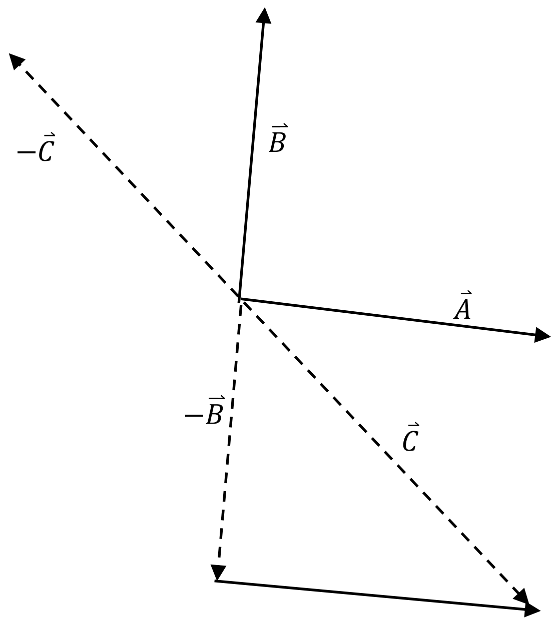
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{\imath}(A_X + B_X) + \vec{\jmath}(A_y + B_y) + \vec{k}(A_z + B_Z)$$

$$= \vec{\imath}C_X + \vec{\jmath}C_y + \vec{k}C_z$$

ملاحظة (هناك عدة طرق لحساب المحصلة لمتجهين في حال كون الزاوية قائمة نستخدم نظرية فيثاغورس واما في حالة الزاوية غير قائمة نستخدم قانون الجيب تمام)

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta)_{AB}$$

اما عملية الطرح



من الرسم نلاحظ ان

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \qquad \ldots\ldots (7)$$

سؤال هل عملية الطرح إبداليه وضح ذلك؟

إذا كان

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\vec{B} = \vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{\imath}(A_X - B_X) + \vec{\jmath}(A_y - B_y) + \vec{k}(A_z - B_Z)$$

$$=\vec{\imath}C_X + \vec{\jmath}C_y + \vec{k}C_z$$

مثال: -إذا كان

$$\vec{A} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

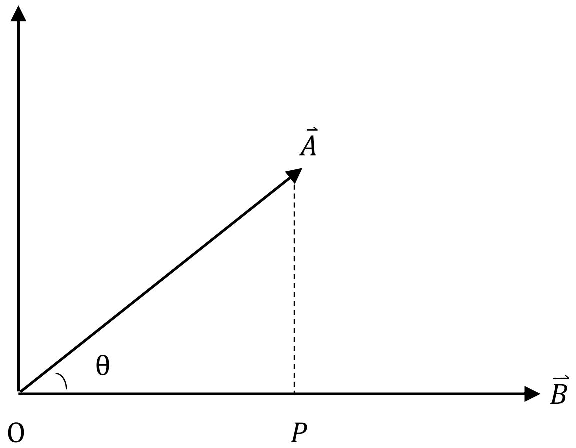
$$\vec{B} = \overrightarrow{3\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

$$C = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

احسب المتجه $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ والمتجه $\vec{M} = \vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C}$

1.3 تحليل المتجهات Resolution of Vectors

تحليل مركبات أي متجه باتجاه متجه اخر يعني إيجاد مساقط المتجه نسبة الى المتجه الاخر في اتجاه محدد نلاحظ الشكل التالي.

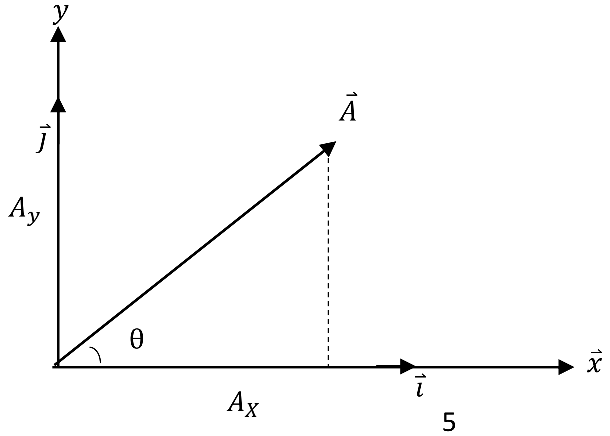


أي ان مسقط المتجه $\vec{A}$ على $\vec{B}$ هي المسافة OP ويكون مسقط المتجه موجبا باتجاه $+\vec{B}$ وسالبا باتجاه $-\vec{B}$

$$A_B = Acos(\theta) \qquad \ldots\ldots (8)$$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

لتحليل المتجه في المستوي xy



بالتالي يمكن تحليل مركبات المتجه باتجاه المحور x والمحور y بالاستفادة من النسب المثلثية لجيب وجيب تماما وضل الزاوية كذلك باستخدام نظرية فيثاغورس

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} \qquad \ldots\ldots (9)$$

$$A_x = A\cos(\theta) \qquad \ldots\ldots (10)$$

$$A_y = A\sin(\theta) \qquad \ldots\ldots (11)$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2} \qquad \ldots\ldots (12)$$

$$\tan(\theta) = \frac{A_y}{A_x} \qquad \ldots\ldots (13)$$

1.4 ضرب المتجهات: Vector Multiplication

يوجد نوعان من ضرب المتجهات هما الضرب العددي والضرب الاتجاهي:

1- الضرب العددي: Dot product or scalar product

وهو الضرب الذي ينتج منه كمية عددية ويعبر عنه رياضياً

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)_{AB} \qquad \ldots\ldots (14)$$

حيث $(\theta)_{AB}$ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

لحسب الضرب العددي لكل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اذا كان

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\vec{B} = \vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = \left(\vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z\right).\left(\vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z\right)$$

$$= A_XB_X + A_yB_y + A_zB_z$$

حصلنا على النتيجة السابقة من خلال استخدام خصائص الضرب العددي

$$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \qquad (\theta = 0) \text{ متوازيان}$$

$$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0 \qquad (\theta = 90) \text{ متعامدان}$$

مثال: اثبت قانون الجيب تمام عند جمع متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|cos(\theta)_{AB}$$

الحل:

لنفرض المتجه

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{C} = (\vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z) + (\vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z)$$

$$= \vec{\imath}(A_X + B_X) + \vec{\jmath}(A_y + B_y) + \vec{k}(A_z + B_z)$$

$$= \vec{\imath}(C_X) + \vec{\jmath}(C_y) + \vec{k}(C_z)$$

اذن

$$C_X = A_X + B_X \quad \& \quad C_y = A_y + B_y \quad \& \quad C_z = A_z + B_z$$

$$C^2 = (A_X + B_X)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2$$

$$=(A_X + A_y + A_z)^2 + (B_X + B_y + B_z)^2 + 2(A_XB_X + A_yB_y + A_zB_z)$$

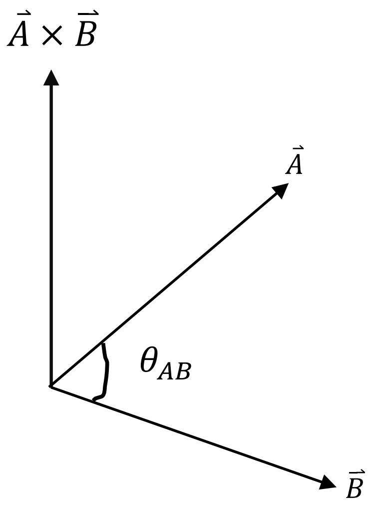
$$=A^2 + B^2 + 2\vec{A}.\vec{B}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|cos(\theta)_{AB}$$

1- الضرب العددي: Cross product

وهو الضرب الذي ينتج منه كمية اتجاهية ويعبر عنه رياضياً

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|sin(\theta)_{AB}\hat{u} \qquad \ldots\ldots (15)$$



حيث ان $\hat{u}$ وحدة المتجه $\vec{A}\times\vec{B}$ ويكون عمودي على كل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ويحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمن (وضع اليد بموازاة احد المتجهين وتدويرها باتجاه المتجه الاخر فأن الابهام يشير الى اتجاه المتجه $\vec{A}\times\vec{B}$) .

لحسب الضرب الاتجاهي لكل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اذا كان

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\vec{B} = \vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(\vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z\right)\times\left(\vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z\right)$$

$$= \left(\vec{\mathbf{i}}\times\vec{\mathbf{i}}\mathbf{A_X B_X} + \vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{j}}\mathbf{A_y B_y} + \vec{\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{k}}\mathbf{A_z B_z}\right) + \vec{\imath}\times\vec{\jmath}A_X B_y + \vec{\imath}\times\vec{k}A_x B_z + \vec{\jmath}\times\vec{\imath}A_y B_X + \vec{\jmath}\times\vec{k}A_y B_z + \vec{k}\times\vec{\imath}A_z B_x + \vec{k}\times\vec{\jmath}A_z B_y$$

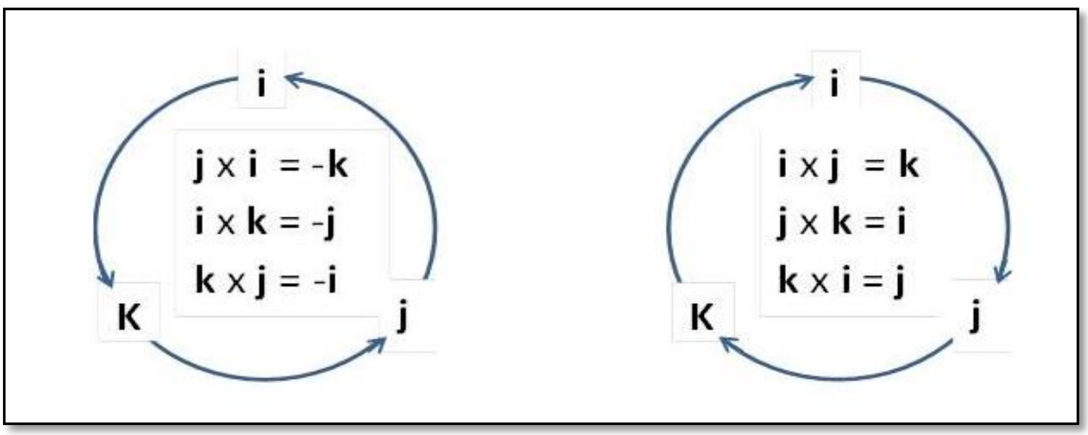
$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

حصلنا على النتيجة السابقة من خلال استخدام خصائص الضرب الاتجاهي

$$\vec{\imath}\times\vec{\imath} = \vec{\jmath}\times\vec{\jmath} = \vec{k}\times\vec{k} = 0 \longrightarrow (\theta = 0)$$

$$\vec{\imath}\times\vec{\jmath} = \vec{k} \ \ \& \vec{\jmath}\times\vec{k} = \vec{\imath} \ \ \& \vec{k}\times\vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

$$\vec{\jmath}\times\vec{\imath} = -\vec{k} \ \ \& \vec{k}\times\vec{\jmath} = -\vec{\imath} \ \ \& \vec{\imath}\times\vec{k} = -\vec{\jmath}$$



اتجاه عقارب الساعة   **اتجاه عكس عقارب الساعة**

ويمكن كتابة $\vec{A} \times \vec{B}$ باستخدام المحددات

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_X & A_z \\ B_X & B_z \end{vmatrix} + \widehat{K}\begin{vmatrix} A_X & A_y \\ B_X & B_y \end{vmatrix}$$

مثال1: إذا كان المتجهين $\bar{A} = 2i + 4j - 5k$ و $\bar{B} = -i + 2j + 6k$ احسب:

1- |A| , |B| 2- A-B , A+B 3- A.B 4- A×B 5- θ between A and B

مثال2: يوصف المتجهان بالإحداثيات المتعامدة $\bar{A} = iA_x + jA_y + kA_z$ و $\bar{B} = iB_x + jB_y + kB_z$ ، برهن بان الضرب العددي بين المتجهين يعطى بالعلاقة:

$$A.B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

مثال 3: إذا علمت ان المتجهين

$$\vec{a} + \vec{b} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k} \quad \& \quad \vec{a} - \vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$

احسب الزاوية بين بين المتجهين $\vec{a}$ & $\vec{b}$ ؟

مثال4: إذا علمت ان المتجهين $\vec{A}$ & $\vec{B}$ متعامدان حيث

$$\vec{A} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k} \quad \& \quad \vec{B} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \beta\hat{k}$$

احسب قيمة β ؟

امثلة الكتاب (مثال رقم 1 صفحة 21 ومثال 2 صفحة 25)؟ H.W

أسئلة الكتاب (السؤال الاول، الثالث، السابع والتاسع) H.W