مبادئ الاحتمالية

في هذا الفصل نحاول تقديم ملاحظات أساسية مهمة لعرض نظرية الاحتمال, بالإضافة إلى القوانين التي يجب أن تخضع لها الاحتمالية وكذلك التعرف على الأساس الذي يتم على ضوؤه تحديد الاحتمال.

نَحتاج الى ربط الاحتمال بمقترح (Proposition) واحد بحيث يعطي مقترحاً آخر. كلمة مقترح (Proposition) تظهر دور الاحتمال كَامتداد للقواعدِ المنطقية للقضية المجهولة التي تَقعُ بين نهايات الحقيقة (التي تمثل حدوث الشيء) او البطلان (عدم الحدوث الشيء). يرمز للمقترح (والذي يعطي المعلومة الأولية)بـ(I) وهو يمثل معلوماتنا. أما المقترح والذي يمثل الاحتمال المَشْكُوك بحدوثه (أو المراد توكيده) او عدمه بـ(A). وبشكل واضح فان عملية رَبطَ احتمالية حدوث (A) سَيَعتمدُ على المعلومة (I).

مثال:

1- (I) المعلومة الأولية: أمطرت أمس.
(A) محور الاحتمال: هي ستمطر اليوم.
2- (I) المعلومة الأولية: اخترت جهاز واحد من مختبر الكهرباء العملي.
(A) محور الاحتمال: الجهاز سيكون أميتر نوع HP.
3- (I) المعلومة الأولية: اشتريت تذكرة يانصيب.
(A) محور الاحتمال: أنا سَأَربح اليانصيب هذا الأسبوع.
4- (I) المعلومة الأولية: هذه ذرّة الأرغون.
(A) محور الاحتمال: الذرة ستتواجد في الحالة الأرضية Ground state.

كل المعلومات الإضافية والتي ستضاف إلى معرفتِنا السابقة I قَدْ تُغيّر الاحتمال الذي خصّص لـ (A). على سبيل المثال ما هو الاختلاف الذي قد تحدثه المعلومات الإضافية التالية للأمثلة السابقة؟

1- (I) المعلومة الأولية: أمطرت أمس، وهي أيضاً أمطرت خلال الأربعين يوم الماضية.

2- (I) المعلومة الأولية: اخترت جهاز واحد من مختبر الكهرباء العملي، وخمسة أجهزة مفقودة مِنْ المختبر أصلا.
3- (I) المعلومة الأولية: اشتريت تذكرة يانصيب، لَكنّي اشتريت التذكرةَ في السَنَة الماضية.
4- (I) المعلومة الأولية: هذه ذرّة الأرغون، غاز الأرغون بدرجةِ حرارة 1000K.

من المهم أن نلاحظ أن اعتماد (A) اي ان احتمالية حدوثه P(A) يكون معتمد على (I). نشير على احتمال حدوث (A) على ضوء المعلومات (I) مِن خلال العلاقة P(A/I). حيث نَقُول بان العلاقة P(A/I) تمثل احتمالية حدوث A وفق المعطيات I.

التعريف الكلاسيكي The Classical definition

التعريف الكلاسيكي لاحتمالية حدوث A يكون:

$$P(A|I) = \lim_{N(I)\to\infty}\left(\frac{N(A)}{N(I)}\right)$$

حيث أن N(I) تمثل عدد المرات التي وصفت بها الظروف الحقيقية لـ I وان N(A) هو عدد هذه المقترحات التي تعطي A كمقترح وتبين بأنه حقيقي بين المقترحات الأخرى. هكذا فان P(A/I) يمثل كسرا من حالات I الذي أَعطي A، ضمن مدى بعيد.

مثال:

اذا افترضنا مختب يحوي اجهزة فان N(A) ستمثل عدد مرات سحب جهاز من المختبر لكي نحصل على الجهاز المطلوب A.

تعريفِ درجة الاعتقاد P(A/I) Degree of belief definition

درجة الاعتقاد المنطقية والتي يكون المقترح A حقيقي وفق الظروف المحدّد ضمن I. إذا عندما نكرر N(I) من الحسابات أو الحالات او المرات فان القيمة المتوقعة لتكون A صحيحة الحدوث هي:

$$N(A) = P(A|I) \times N(I)$$

وهي تمثل معدل عدد المرات التي ستكون فيها A صحيحة إذا أجرينا N(A) من المحاولات.

مثال:

عندما نتكلّم عن الاحتمالات أَو الفرصِ لحدث الشيء كما أنْ يَكُون بمرة واحدة من $P(A)^{-1}$، إذن لو أن الاحتمالية هي $P(A)=1/3$ فان الاحتمالات ستكون 1 من 3 محاولات (اي نحتاج الى ثلاث محاولات لكي نحصل على الشيء بنسبة مئة بالمئة) وإذا كان $P(A)=2/5$ فان الاحتمال يكون 1 من $2(1/2)$ محاولة أو 2 من (أو) لكل 5 محاولات (اي نحتاج الى خمسة محاولات لكي نحصل على الشيء بنسبة مئة بالمئة).

قواعد الاحتمال The rules of probability

1- مدى القيم Range of values: الاحتمالية $P(A/I)$ تقع ضمن المدى محدد هو

$$0 \leq P(A|I) \leq 1$$

مع دلالة بأن 1 يشير بان A حقيقي (أو حدث فعلاً)، و0 الذي يدل بان A خاطئ (لم يحدث أصلا).

2- عملية الإنكار The negation operation

الفرض بان $\bar{A}$ (المقصود بها ليس A) تمثل الفرض المعاكس إلى A. فان $P(\bar{A})$ ستكون او تمثل الاحتمال بان الادعاء A خاطئ.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

اي اننا قد اخرجنا او طرحنا احتمال حدوث A من الاحتمال الكلي.

3- الافتراضات (الادعاءات) المركّبة Composite assertions

إذا افترضنا أن هنالك افتراضين A1 وA2.

أولا: A1·A2 يمثل بان الافتراض المركّب A1 وA2 كلاهما صحيح الحدوث. هذا يعرف أيضا بارتباط conjunction كل من A1 وA2.

ثانيا: A1 OR A2 يَدْل على أن في هذا الافتراض المركّب هنالك على الأقل أحد الافتراضين A1 أوA2 حقيقي الحدوث. هذا مَعروف كذلك بعدم الارتباط disjunction كل من A1 وA2.

مثال:

I: جهاز سحب من مختبر الالكترونيات العملي،

A1: ان الجهاز هو فولتميتر،

A2: إنّ الجهاز من نوع Philippic،

A1·A2: ان الجهاز هو فولتميتر ومن نوع Philippic،

A2 OR A1: ان الجهاز أما هو فولتميتر أو من نوع Philippic (أو هو فولتميتر ومن نوع Philippic).

4- الاستقلال المتبادل (MI) Mutually independent

A1 وA2 يقال بأنهما مستقلين متبادلين إذا كان احتمالية حدوث الاول أو حقيقة حالة احدهما لا تخبرنا بشيء عن احتمالية حدوث أو حقيقة الحالة الأخرى. بصيغة جبرية:

$$P(A_2|A_1 \cdot I) = P(A_2|I), \text{ and } P(A_1|A_2 \cdot I) = P(A_1|I)$$

<u>مثال:</u>

I: جهازان سحبا من مختبرين منفصلين مثل مختبر 103 و مختبر 203.

A1: الجهاز الذي سحب من المختبر 103 هو فولتميتر،

A2: الجهاز الذي سحب من المختبر 203 هو اوفوميتر.

نلاحظ أن احتمالية الجهاز الأول لا توثر في احتمالية الجهاز الثاني والعكس صحيح.

<u>سؤال:</u> احتمالية تواجد كل من الإلكترونين (كل الكترون على حدة) المتواجدين في نفس المدار هل هي متبادلة او لا؟

5- الخصوصية المتبادلة (ME) Mutually exclusive

أي مجموعة A1 وA2 و....AΩ من المزاعم أو المقاصد يقال بأنها متعارضة فقط إذا: لا يوجد حالتين لا يمكنهما أن يكونا صحيحين في نفس الوقت. أما الصيغة الرياضية فتكون:

$$P(A_i \cdot A_j|I) = \delta_{ij} P(A_i) \text{ for } 1 \leq i, j \leq \Omega.$$

مثال:

I: جهاز سحب من مختبر الـ103.

A1: الجهاز هو فولتميتر.

A2: الجهاز الذي سحب من المختبر هو اميتر.

نلاحظ أن لا يمكن أن تكون هنالك احتمالين صحيحين في نفس الوقت عندما تكون هنالك سحبة واحدة فقط, بل من خلال سحبتين $\Omega = 2$.

6- الخصوصية المتبادلة والشاملة Mutually exclusive and exhaustive (MEE)

مجموعة المزاعِم او الادعاءات A1 وA2 و....AΩ يقال بأنها كانت متعارضة وشاملة إذا على الأقل إحدى A1 وA2 و....AΩ يَجِب أَنْ يَكُونَ حقيقيا.َ أما الصيغة الرياضية فتكون:

$$P(A_1 \text{ OR } A_2 \text{ OR} \dots \text{ OR } A_\Omega | I) = 1$$

مثال:

I: جهاز سحب من مختبر203. ملاحظة: المختبر فيه ثلاث اجهزة Ω=3.
A1: الجهاز الذي سحب من المختبر 203 هو فولتميتر،
A2: الجهاز الذي سحب من المختبر 203 هو أوفوميتر.
A3: الجهاز الذي سحب من المختبر 203 هو راسم ذبذبة.

نلاحظ أن A1, A2 , A3 هم ضمن الحالة MEE مَع Ω=3. لان عندما تكون هنالك عملية سحب واحدة ستؤدي إلى وجود حالة واحدة صحيحة فقط.

لمجموعة من المزاعم او المقاصد نوع MEE فان شرط المعايرة يكون:

$$\sum_{r=1}^{\Omega} P(A_r | I) = 1$$

MEE يَعْني بأنّ واحد وفقط من A_r يَجِبُ أَنْ يَكُونَ حقيقيَ عند أي لحظة. وبما ان

$$P(A|I) = \lim_{N(I)\to\infty} \left(\frac{N(A)}{N(I)} \right)$$

وبذلك يكون

$$\sum_{r=1}^{\Omega} P(A_r | I) \overset{=}{\scriptstyle LR} \sum_{r=1} \Omega \frac{N(A_r)}{N(I)} = \frac{N(I)}{N(I)} = 1$$

توضيح:
تخصيص القِيَم للاحتمال: باستعمال المجاهل والمعلومات

أفترض بأنّ المعلومة I تميّز عدد Ω من النتائج MEE، لكن لا يُخبرُنا عن نتيجةَ واحدة مفضلة على الاخرى. في غياب المعلومات الإضافية فان الاحتمالية ستخصّص لكُل مجموعة من MEE نتائج A_r بحيث

$$P_r \equiv P(A_r|\Omega) = \frac{1}{\Omega} \qquad \text{for all } r$$

إنّ الشيءَ الوحيدَ الذي نَعْرفُه هو عددُ نَتائِجِ MEE المحتملة. إذا يمتلكون جميعهم نفس القيمة P , فان شرط المعايرة يخبرنا ما هو مقدار تلك القيمة التي يجب أن تكون, $P=1/\Omega$.

<u>مثال:</u>

أي عملة معدنية مَرْمية. نَعْرفُ بأنّ هناك $\Omega=2$ نَتائِج محتملة (صورة أو كتابة). نحن يَجِبُ أَنْ نخصّص كُلّ تلك النَتائِج بنفس الاحتمال $P=1/\Omega=1/2$

<u>مثال:</u>

أي غاز يُتْرَك ليصل إلى حالة الاتزان في حاويةِ مَعْزُولةِ. فيزياء الكمّ تُخبرُنا (فقط) بأنّه قد يُوْجَد في أي عدد كبير جداً Ω "microscopic states". على ضوء ذلك نحن يَجِب أَنْ نُخصّص كُلّ تلك الحالات وبنفس الاحتمال والمتمثل بـ $P=1/\Omega$. يعتبر هذا الحجر الأساسي في الفيزياءِ الإحصائية. مع ملاحظة أن الانتروبي Entropy $S=k\ln\Omega$ هو الوصلة بين الميكانيكا الإحصائي، الذي يَصِفُ السلوكَ ألمجهري للأجسام، والديناميكا الحرارية، الذي يَصِفُ الخواص الحجمية bulk properties.

<u>عدد طرق التوزيع Number-of-ways arguments</u>

إذا افترضنا أن النتيجة A يمكن أن تَحْدث من خلال W من الطرق المميّزة، $A_W...A$ التي هي جزء من مجموعة أكبر $A\Omega...A$ التي تكون متعارضة وشاملة، وتعطى المعلومات I. في غيابِ معلومات أكثر يكون:

$$P(A|W, I) = \frac{W}{\Omega}$$

المثال:

رمي نردين: فان احتمال أن يكون مجموع الرقمين الذين سيظهران مساوي إلى النتيجةِ الكليةِ تساوي 7.

I: رمي نردين.

A: إنّ مجموع الأعدادِ يساوي 7.

هناك $\Omega = 6 \times 6 = 36$ نتيجة محتملة ومميزة للنردين. لكُلّ هذه النَتائِجِ يجب أنْ تُخصّصَ احتمالية مساوية أي أن $p = 1/36$. مجموع الرقم 7 يمكن أن يأتي من المجموعاتِ التاليةِ: 1&6, 6&1, 2&5, 5&2, 3&4, 4&3. فهكذا يكون $W = 6$ و $P(score = 7) = \frac{W}{\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

معامل ذو الحدين The binomial coefficient

$$^{N}C_{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

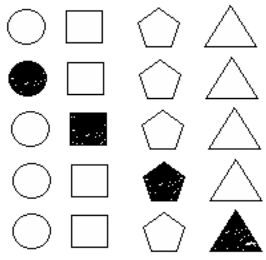
يمثل عدد الطرقِ التي يمكن أن نختار بها m جسيم متمايز من مجموعة تضم N من الأجسام المُتمايّزة.

مثال:

اذا افترضنا N من الأجسام المُتمايّزة. واننا نريد ان نضع m من اللاصقات حمراء على مجموعة منها (كان نريد وضع m من الجسيمات في مكان محدد) والعدد المتبقي $N-m$ نضع له لاصقات خضراء (كان نريد وضع $N-m$ من الجسيمات في مكان محدد اخر). ولتَخصيص جسمَ إلى مجموعة معينة وَضعت لاصقة حمراء أَو خضراء عليه.

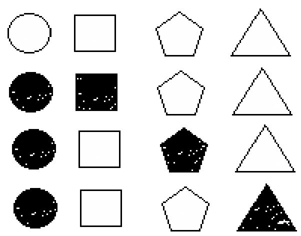
الخطوة الاولى: سنضع اول علامة حمراء على اي جسيم من الجسيمات البالغ عددها N لذا سيكون هنالك N من الاختيارات على اعتبار ان كل جسيم يختلف عن الاخر. مع ملاحظة انه سيتبقى N-1 من الجسيمات بعد هذا الاختيار.

مثال لنظام مكون من اربعة جسيمات



الخطوة الثانية: سنضع علامة حمراء على احد الجسيمات المتبقية والبالغ عددها N-1 اي سيكون هنالك N-1 من الاختيارات.

في المثال السابق ولنفترض اننا قد اخترنا اولا الدائرة فان الاحتمالات المتبقية ستكون



الخطوة الثالثة: سيكون الاختيارات هو N-2.
نستمر حتى تنتهي العلامات الحمراء في الخطوة m حيث يكون عدد الطرق في الاختيارات هو N-m-1.

لكل خطوة هناك اختيار لذى يكون الاختيار الكلي في حالة العلامات الحمراء هو

N(n-1)(N-2)(N-3).....(N-m-1)

اما الاحتمال لكل اختيار ووفق العلاقة $P = \frac{W}{\Omega}$ حيث سيمثل W عدد الجسيمات المراد الاختيار منها اما Ω فستمثل عدد الخطوات:

في الخطوة الاولى: $P(1) = \frac{N}{1}$

في الخطوة الثانية: $P(2) = \frac{N-1}{2}$

في الخطوة الثالثة : $P(3) = \frac{N-2}{3}$

وفي الخطوة m: $P(m) = \frac{N-(m+1)}{m}$

لذا عدد الطرق او الاحتمالات الكلي لاختيار m من الجسيمات المتمايزة يكون

$$P(1)P(2)......P(m) = \frac{N}{1}\frac{N-1}{2}\frac{N-2}{3}...\frac{N-(m+1)}{m}$$

$$P(1)P(2)......P(m)=\frac{N(N-1)(N-2)....N-(m+1)}{1\times 2\times 3....m}$$

$$P(1)P(2)......P(m)=\frac{N(N-1)(N-2)....N-(m+1)}{m!}$$

$$^{N}C_{m}=\frac{N(N-1)(N-2)....(N-(m+1))(N-m)!}{m!(N-m)!}$$

$$^{N}C_{m}=\frac{N!}{m!(N-m)!}$$

مثال: اذا كان لدينا ثلاث جسيمات متمايزة مثل A,B,C ونريد ان نختار جسيم ثم جسيمين ثم ثلاث جسيمات فان طرق الاختيار ستكون:

$^{3}C_{1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}=3$ أي ان اما A او B او C

$^{3}C_{2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3$ أي ان اما AB او AC او CB

$^{3}C_{3}=\frac{3!}{3!(3-3)!}=1$ أي ان ABC

مثال: اذا كان لدينا خمسة جسيمات متمايزة مثل A,B,C,D,E ونريد ان نختار جسيم ثم جسيمين ثم ثلاث جسيمات فان طرق الاختيار ستكون:

$^{5}C_{1}=\frac{5!}{1!(5-1)!}=5$ أي ان اما A او B او C او D او E.

$$^{5}C_{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=10$$

$$^{5}C_{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=10$$

$$^{5}C_{4}=\frac{5!}{4!(5-4)!}=5$$

مثال: اذا كان لدينا ستة جسيمات متمايزة مثل A,B,C,D,E,F ونريد ان نختار جسيم ثم جسيمين ثم ثلاث جسيمات فان طرق الاختيار ستكون:

$$^{6}C_{1}=\frac{6!}{1!(6-1)!}=6$$

$$^6C_2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

$$^6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

$$^6C_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

$$^6C_5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = 6$$

$$^6C_6 = \frac{6!}{6!(6-6)!} = 1$$