س1/ افرض ان (θ) لها توزيع بواسون بالمعلمة (λ)، فاذا علمت ان $u(d,\theta) = -2(d-\theta)^2$ ما هو قرار بيز وما هو منفعة بيز.

الحل:

$$g(\theta) = \frac{\lambda^{\theta} \cdot e^{-\lambda}}{\theta!}$$ (توزيع بواسون)

$$E(L) = \sum -2(d-\theta)^2 g(\theta)$$

$$E(L) = -2\,d^2 \sum g(\theta) + 2\,d \sum \theta \cdot g(\theta) - 2 \sum \theta^2 \cdot g(\theta)$$

$$E(L) = -2\,d^2 + 2\,\mathrm{d}E(\theta) - 2\,E(\theta^2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial d} = -4\,\mathrm{d} + 2E(\theta)$$

$$d = \frac{E(\theta)}{2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial d^2} = -4 < 0$$

المشتقة الثانية تمثل نهاية عظمى. اذا مقدر بيز يمثل توقع الدالة السابقة مقسوم على (2)

$$d = \frac{\lambda}{2}$$

منفعة بيز هي القيمة الناتجة من تعويض تقدير بيز في دالة المنفعة أي ان

$$E_{d^B}(L) = -2\sum \left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right)^2 g(\theta)$$

$$E_{d^B}(L) = -2\sum \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 g(\theta) + 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sum \theta g(\theta) - 2\sum \theta^2 g(\theta)$$

$$E_{d^B}(L) = -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda E(\theta) - 2\,E(\theta^2)$$

$$E_{d^B}(L) = -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda E(\theta) - 2\left(\,V(\theta) - (E(\theta))^2\right)$$

$$E_{d^B}(L) = -\frac{5}{2}\lambda^2 - \lambda$$

س2/ اذا كان التوزيع السابق للمعلمة العشوائية (θ) هو توزيع بيتا $\theta \sim B(2,2)$ اوجد مقدر بيز وخسارة بيز باستعمال دالة خسارة $L(d,\theta) = 2 + 3(d-\theta)^2$

الحل :

بما ان (θ) تتوزع توزيع بيتا اذا

$$f(\theta;\alpha;\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}\cdot(1-\theta)^{\beta-1}$$

$$E(L)=\int_0^1\left(2+3(d-\theta)^2\right)g(\theta)\,d\theta$$

$$E(L)=2\int_0^1 g(\theta)\,d\theta+3\int_0^1(d-\theta)^2 g(\theta)\,d\theta$$

$$E(L)=2+3\int_0^1\left(d^2-2\,d\,\theta+\theta^2\right)g(\theta)\,d\theta$$

$$E(L)=2+3d^2\int_0^1 g(\theta)-6\,d\int_0^1\theta g(\theta)+3\int_0^1\theta^2 g(\theta)d\theta$$

$$E(L)=2+3d^2-6\,d\,\mathrm{E}(\theta)+3\mathrm{E}\left(\theta^2\right)$$

ان تقدير بيز هو قيمة *(d)* التي تجعل توقع دالة الخسارة في نهايتها الصغرى ، وبما ان دالة الخساره هي الدالة التربيعية فيتم الاشتقاق دالة التوقع بالنسبة *(d)*

$$\frac{\partial E(\theta)}{\partial d}=6\,d-6E(\theta)$$

$$d=E(\theta)$$

نشتق المشتقة الثانية للتاكد من ان نقطة الانقلاب هي نهاية صغرى (دالة خسارة)

$$\frac{\partial^2 E(\theta)}{\partial d^2}=6>0$$

اذا النقطة نهاية صغرى.

اذا مقدر بيو هو

$$d=\frac{\alpha}{\alpha+b}$$

$$d=\frac{1}{2}$$

خسارة بيز (مخاطرة بيز) هي

$$E(L)=2+3d^2-6\,d\,\mathrm{E}(\theta)+3\left(V(\theta)+E(\theta)^2\right)$$ (كيف)

$$E(L)=2+3(.5)^2-6\,(.5)\cdot(\,.5)+3(.05+.25)$$

$$E(L)=2.15$$

س3/ اذا علمت ان $g(\theta)\sim G(3,4)$ ما هو مقدر بيز وما هي منفعة بيز لدالة المنفعة

$$u(d;\theta)=-(d-\theta)^2$$

الحل

ان توزيع كاما هو

$$g(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}}\cdot\theta^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{\theta}{\beta}}$$

وبما ان مقدر بيز هو قيمة $(\hat{\theta})$ التي تجعل توقع دالة المنفعة في نهايتها العضمى

$$E(L)=\int_0^{\infty}L\cdot g(\theta)\ d\theta$$

وضح

$$E(L)=-\int_0^{\infty}(d-\theta)^2\cdot g(\theta)\ d\theta$$

$$E(L)=-d^2\int_0^{\infty}g(\theta)\ d\theta+2\cdot d\int_0^{\infty}\theta\cdot g(\theta)\ d\theta-\int_0^{\infty}\theta^2\cdot g(\theta)\ d\theta$$

لماذ اكتب الخطوات بالتفصيل

$$d=E(\theta)$$

$$\therefore\ d=\alpha\cdot\beta$$

$$d=12$$

أكمل الحل (منفعة بيز).

س4/ اذا كان $p(\theta_2)=2p(\theta_1)=3p(\theta_3)$

ما هو قرار بيز لجدول الخسارة

	θ_1	θ_2	θ_3
d_1	1	0	6
d_2	5	4	3

$$P(\theta_1)+p(\theta_2)+P(\theta_3)=1$$

$$p(\theta_1)+2P(\theta_1)+\frac{2}{3}P(\theta_1)=1$$

$$\frac{11}{3}p(\theta_1)=1$$

$$p(\theta_1)=\frac{3}{11};p(\theta_2)=\frac{6}{11};p(\theta_3)=\frac{2}{11}$$

قرار بيز هو قيمة $(\hat{\theta})$ التي تجعل توقع دالة الخسارة اقل مايمكن أي ان

$$E(L) = \sum L \cdot p(\theta) = \min$$

$$E_{d_1}(L) = 1 \cdot \frac{3}{11} + 0 \cdot \frac{6}{11} + 6 \cdot \frac{2}{11}$$

$$E_{d_1}(L) = \frac{15}{11}$$

$$E_{d_2}(L) = 5 \cdot p(\theta_1) + 4 \cdot p(\theta_2) + 3 \cdot p(\theta_3)$$

$$E_{d_2}(L) = 5 \cdot \frac{3}{11} + 4 \cdot \frac{6}{11} + 3 \cdot \frac{2}{11}$$

$$E_{d_2}(L) = \frac{45}{11}$$

اذا قرار بيز هو القرار الاول

س5/ اذا كان $x\ /\ \theta \sim N(\theta; 2)$ وان $\theta \sim N(0, 1)$ اوجد مقدر بيز ومخاطرة بيز اذا علمت ان

$$L(\hat{\theta}; \theta) = \pi(\hat{\theta} - \theta)^2$$

الحل:

$$\because\ g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}.\theta^2} \quad ; f(x/\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$

$$h(\theta/x) = \frac{f(x/\theta) \cdot g(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x/\theta) \cdot g(\theta)\ d\theta}$$

$$h(\theta/x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-\theta)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}.\theta^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-\theta)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}.\theta^2}\ d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\theta)^2}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\theta^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\theta)^2}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\theta^2}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{e^{-\frac{1}{4}\cdot\left(x^2-2x\theta+\theta^2\right)}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\theta^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\cdot\left(x^2-2x\theta+\theta^2\right)}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\theta^2}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{e^{\frac{-x^2}{4}+\frac{x\theta}{2}-\frac{\theta^2}{4}-\frac{\theta^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{4}+\frac{x\theta}{2}-\frac{\theta^2}{4}-\frac{\theta^2}{2}}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{e^{\frac{-x^2}{4}+\frac{x\theta}{2}-\frac{3\cdot\theta^2}{4}}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{4}+\frac{x\theta}{2}-\frac{3\cdot\theta^2}{4}}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{e^{\frac{x\theta}{2}-\frac{3\cdot\theta^2}{4}}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\theta\cdot x-\frac{3}{2}\cdot\theta^2+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x^2\right)}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{e^{\frac{x\theta}{2}-\frac{3\cdot\theta^2}{4}}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\theta^2-\theta\cdot x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x^2\right)}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{e^{\frac{x\theta}{2}-\frac{3\cdot\theta^2}{4}}}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}x\right)^2-\frac{1}{12}x^2}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{e^{\frac{x\theta}{2}-\frac{3\cdot\theta^2}{4}}}{e^{-\frac{1}{12}x^2}\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}\,x\right)^2}d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\theta-\frac{\sqrt{6}}{6}\,x\right)^2}$$

ولايجاد مقدر بيز باستخدام اسلوب بيز بالتقدير يجب ايجاد قيمة المقدر التي تجعل توقع دالة الخسارة في نهايتها الصغرى.

$$E(L/x)=\int_{-\infty}^{\infty}\pi\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2 h(\theta/x)d\theta$$

$$E(L/x)=\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{\theta}^2-2\hat{\theta}^2\theta+\theta^2\right)^2 h(\theta/x)d\theta$$

نشتق ونجعل المشتقة الاولى تساوي الصفر ، ثم نشتق المشتقة الثانية لمعرفة نقطة الانقلاب نهاية صغرى او عظمى (تترك للطالب) ، نحصل على الاتي:

$$\hat{\theta}=E\left(h\left(\theta/x\right)\right);\qquad \hat{\theta}=\frac{\sqrt{6}}{6}x$$

اما خسارة بيز فهي

$$E(L/x)=\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{6}x^2-2\frac{\sqrt{6}}{6}x\,\theta+\theta^2\right)^2 h(\theta/x)d\theta$$

س6/ اذا كانت $x/\theta \sim Bi(\theta)$ ، وكان التوزيع الاولي للمعلمة (θ) هو $g(\theta)=k\theta(1-\theta)$ جد الثابت k ثم جد مقدر بيز للمعلمة (θ) اذا علمت ان دالة المنفعة هي $u(d;\theta)=2-3(d-\theta)^2$

الحل/ $\binom{n}{x}$

$$g(\theta)=k\theta(1-\theta)$$

$\because g(\theta)=1$ **لماذا**

$k=6$ **وضح الخطوات**

$$h(\theta/x)=\frac{p(x/\theta)\cdot g(\theta)}{\int_0^1 p(x/\theta)\cdot g(\theta)\,d\theta}$$

$$h(\theta\ /\ x)=\frac{c_x^n\theta^x\theta^{n-x}6\theta^x\theta^{n-x}}{\int_0^1 c_x^n\theta^x\theta^{n-x}6\theta^x\theta^{n-x}d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{\theta^{2x}(1-\theta)^{n-2x+1}}{\int_0^1 \theta^{2x}(1-\theta)^{n-2x+1}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{\theta^{2x}(1-\theta)^{n-2x+1}}{\frac{\Gamma(2x+1)\Gamma(n-2x+2)}{\Gamma(n+1)}\int_0^1\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2x+1)\Gamma(n-2x+2)}\theta^{2x}(1-\theta)^{2-2x}\,d\theta}$$

$$h(\theta/x)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2x+1)\Gamma(n-2x+2)}\theta^{2x}(1-\theta)^{2-2x}\,d\theta$$

ولايجاد مقدر بيز يتم ايجاد توقع دالة المنفعة حيث يمثل مقدر بيز قيمة $(\hat{\theta})$ التي تجعل قيمة التوقع اعظم ما يمكن

$$E(L/x)=\int\left(2-3(d-\theta)^2h(\theta/x)\right)d\theta$$

$$E(L/x)=2\int h(\theta/x)d\theta-3d^2\int h(\theta/x)d\theta+3d\int\theta h(\theta/x)d\theta-3\int\theta^2h(\theta/x)d\theta$$

$$E(L/x)=2-3d^2+3\,dE(\theta)-3E\left(\theta^2\right)$$

نشتق ونساوي بالصفر، كما يتم اشتقاق المشتقة الثانية (تترك للطالب)

$$\frac{\partial E(L/x)}{\partial d}=-6d+3E(\theta)$$

$$d=\frac{1}{2}E(\theta)$$

$$d = \frac{x+1}{n+1}$$

ولايجاد منفعة بيز يتم من تعويض مقدر بيز في توقع دالة المنفعة أي

$$U(d,\theta) = 2 - 3\frac{(2x+1)(n-2x+2)}{\left(\frac{x+1}{n+1}\right)^2\left(\frac{x+1}{n+1}+1\right)}$$

يترك التوضيح للطالب