المجموعات المحدبة

تعـريـف :- تسمى المجموعة S مجموعة محدبة (Convex sets) إذا وفقط إذا كان لكل نقطتين $P,Q \in S$

فأنه قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين P ، Q تكون محتواه فعلياً في المجموعة S

أي أنه

المجموعة S محدبة $\leftrightarrow$ $P , Q \in S \rightarrow PQ \subset S$

مبرهنة (٢٣) :-

a) كل مستقيم مجموعة محدبة.

b) كل نصف مستقيم بالنسبة O مجموعة محدبة .

c) أنصاف المستوي (جهتي المستقيم) تكون مجموعة محدبة .

مبرهنة (٢٤) :- قطعة المستقيم مجموعة محدبة

البرهان :- نفرض PQ قطعة مستقيم يجب أن نبرهن PQ مجموعة محدبة

نفرض $X1X2 \in PQ$ يجب أن نبرهن أن $X1X2 \subset PQ$

نفرض $Y \in X1X2 \leftarrow [X1YX2]$

من الفرض $X1 , X2 \in PQ$ نحصل على $[PX1Q] \wedge [PX2Q]$

$[PX1X2] \vee [PX2X1]$

$[X1X2Q] \vee [X2X1Q]$

$[X1YX2] \wedge ([PX1X2] \vee [PX2X1])$

[PX1YX2] ˅ [PX2YX1] ....

[X1YX2] ^ ([X1X2Q] ˅ [X2X1Q])

[X1YX2Q] ˅ [X2YX1Q] ....

([PX1YX2] ˅ [PX2YX1]) ^ ([X1YX2Q] ˅ [X2YX1Q])

[PX1YX2Q] ˅ [X2YX1PQ] ˅ ([X1YX2PQ] ˅ [X1YX2QP]) ˅ [PX2YX1Q]

[PX2YX1Q] → [PYQ] → يحقق

[X2YX1PQ] → [YPQ] → لا يحقق

[X1YX2PQ] → [YPQ] → لا يحقق

[X1YX2PQ] → [YQP] → لا يحقق

[PX2YX1Q] → [PYQ] → يحقق

أو بطريقة أخرى [PX2Q] ^ [PX1Q]

[PX2X1Q] ˅ [PX1X2Q] → [PX2X1] ˅ [PX1X2]

عندما [PX2X1] ← ولدينا [X1YX2]

[PX2X1] ^ [X1YX2] → [PX2YX1] → [PYX1]

ولدينا [PX1Q] ← [PYX1] ^ [PX1Q]

→ [PYX1Q] → [PYQ] → Y Є PQ

عندما [PX1Q]

[PX1X2] ^ [X1YX2] → [PX1YX2]

ولدينا [PX2Q] → [PYX2] →

→ [PYX2Q] → [PYQ] → Y Є PQ

∴ PQ مجموعة محدبة

تعـريـف :- مجموعة كل النقاط على المستقيم m والواقعة على جانب واحد من النقطة O تسمى شعاع (ray)

وتسمى النقطة O مصدر الشعاع .

يتعين الشعاع بمصدره ونقطة أخرى عليه . فإذا كانت النقطة A تنتمي الى الشعاع الذي مصدره النقطة O

فأنه يرمز لهذا الشعاع بالرمز OA ويقال للشعاعين OA و OB بأنهما متعاكسين إذا كانت النقطتين A وb

واقعتين على جانبين متعاكسين من النقطة O

مبرهنة (٢٥) :-

١) الشعاع مجموعة محدبة وليست خالية .

٢) الشعاع مجموعة جزئية من المستقيم .

٣) لكل شعاع مصدر وحيد .

٤) مصدر الشعاع لا ينتمي الى الشعاع .

٥) الشعاع الذي مصدرهُ واقعاً على خط مستقيم ولكنهُ لايقع على الخط المستقيم تكون جميع نقاطه واقعة

على جانب واحد من ذلك الخط المستقيم .

تعـريـف :- (جهة خط المستقيم)

إذا كان m مستقيم و P نقطة خارجه عنهُ فأنه تسمى أنصاف المستوي المتعينة بالخط m

جهتي الخط m

مبرهنة :- إذا كانت A1 , A2 , ... , An مجموعات محدبه فأنه A1∩A2∩...∩An تكون مجموعة محدبه .

البرهان :- $A = A1 \cap A2 \cap \dots \cap An$

نفرض $x, y \in A$

$\rightarrow x,y \in A1,\ x,y \in A2, \dots,\ x,y \in An$

$\rightarrow x-y \quad A1,\ x-y \quad A2, \dots,\ x-y \quad An$

$\rightarrow x-y \quad A$

$\therefore A$ مجموعة محدبة

مبرهنة (٢٦) :- (مبرهنة باش)

١) إذا كانت A , B نقطتين واقعتين على جهتين من الخط m و B , C واقعتين على جهة واحدة

من m فأن A , C واقعتين على جهتين مختلفتين من m

٢) إذا كانت A , B واقعتين على جهتين من الخط m و B , C واقعتين على جهتين مختلفتين

من m فأن A , C واقعتين على جهة واحدة من الخط m

٣) إذا كانت A , B واقعتين على جهة واحدة من الخط m و B , C واقعتين على جهة واحدة من

من الخط m فأن A , C واقعتين على جهة واحدة من الخط m

تعـريـف :- (داخـــل المثـلـث)

إذا كان ΔABC رؤوسهُ النقاط C , B , A فأننا نعني بداخل المثلث ABC هو مجموعة كل النقاط المتكونة من تقاطع كل من :-

١) جهة الخط AB التي تحوي النقطة C

٢) جهة الخط BC التي تحوي النقطة A

٣) جهة الخط AC التي تحوي النقطة B

لذلك فالنقاط التي تقع على المثلث تسمى نقاط حدودية والنقاط التي تقع داخل المثلث تسمى نقاط داخلية

وماعدا ذلك تسمى نقاط خارجية .

مبرهنة (٢٧) :- داخل المثلث مجموعة محدبه .

مبرهنة (٢٨) :- ABC مثلث و Q , P نقطتين مختلفتين واقعتين على الضلعين AB , AC على التوالي

وكانت R نقطة داخلية للمثلث ABC وتقع على المستقيم PQ فأنه [PRQ]

البرهان :- من بديهية ٧ هنالك ثلاث احتمالات

لترتيب النقاط R , Q , P هي

[RPQ] ٧ [PRQ] ٧ [PQR]

نفرض أن [RPQ]

من مبرهنة (٥، ٢٥) النقاط R , Q تقعان على جهتين مختلفتين من الخط AB

من مبرهنة (٥، ٢٥) جميع نقاط الشعاع AC تقع على جهة واحدة من الخط AB

ومن ضمنها النقطتين C , Q

من مبرهنة (١، ٢٦) النقطتان C , R تقعان على جهتين مختلفتين من الخط AB

وهذا يناقض كون R نقطة داخلية

∴ الترتيب [RPQ] غير ممكن

وبنفس الطريقة نبرهن أن الترتيب [PQR] غير ممكن (واجب)

∴ [PRQ] متحقق .

مبرهنة (٢٩) :- إذا كان المثلث ABC و P ,Q نقطتين مختلفتين واقعتين على الضلعين AC , AB على

التوالي بحيث [PRQ] فأن R تقع داخل المثلث ABC .

البرهان :- من مبرهنة (٥ ، ٢٥)جميع نقاط الشعاع PQ

تقع على جهة واحدة من الخط AB ومن

ضمنها النقطتين P , R

جميع نقاط الشعاع AC تقع على جهة واحدة من الخط AB ومن ضمنها النقطتين C , P

من مبرهنة (٣، ٢٦) النقطتين C , R تقع على جهة واحدة من الخط AB

∴ النقطة R تقع على جهة الخط AB والتي تحوي C (تكملة البرهان واجب)

تعـريـف :- إذا كان ABC مثلث فأننا نقول بأن الرأس A يقابل الضلع BC إذا وفقط إذا كان كل الشعاع

يحتوي النقطة A مصدره على الخط BC فقط وعليه نقول إن الضلع BC يقابل الرأس A

في المثلث ABC

مبرهنة (٣٠) :- المستقيم المار برأس المثلث ونقطة داخلية فيه يقطع الضلع المقابل لذلك الرأس .

البرهان :- نفرض m مستقيم يمر بالرأس A لمثلث ABC ويمر بنقطة داخلية للمثلث ولتكن P أي إن m

يقطع الضلعين AC و AB من A .

حسب بديهية (٢) " كل مستقيمان يشتركان بنقطة واحدة على الأكثر " أي إن m لايمكن إن

يقطعهما مرة أخرى . نفرض Q تنتمي الى AC والمستقيم PQ فأن هذا المستقيم أما تنطبق

عليه بديهية باش فهو أما أن يقطع AB وBC وأما لاتنطبق عليه بديهية باش فهو يحتوي احد رؤوس المثلث ABC

١) نفرض PQ يقطع AB في نقطة مثل R ، حسب مبرهنة (٢٨) سوف يكون [QPR]

في المثلث QRC تنطبق عليه بديهية باش المستقيم m يقطع RQ فأنه أما إن يقطع QC أو RC لايمكن إن يقطع QC لأنه جزء من AC أذن المسقيم m

لايمكن أن يقطع AC مرة ثانية أذن يقطع الضلع RC

في المثلث RBC

المستقيم m يقطع RC في نقطة مثل S ← [RSC]

تنطبق عليه بديهية باش أما m يقطع RB أو BC

المستقيم m لايمكن إن يقطع RB لأنه جزء من AB

المستقيم m لايمكن أن يقطع AB مرة أخرى أذن m يقطع الضلع BC

٢) نفرض PQ يقطع BC في نقطة مثل T

حسب مبرهنة (٢٨) ← [TPQ]

حسب بديهية باش ΔQTC

المستقيم m يقطع QT أذن m أما يقطع QC أو يقطع TC

لايمكن للمستقيم m أن يقطع QC لأنه جزء من AC ولا يمكن للمستقيم m أن يقطع AC مرة أخرى

أذن m يقطع TC بما أن TC جزء من BC أذن m يقطع BC

٣) إذا كان QP يحتوي أحد رؤوس المثلث ABC

QP لايمكن أن يحتوي A أو C (لأنه يقطع AC في Q

ولايمكن أن يشترك معهما بأي نقطة أخرى أو[AQC] فقط)

أذن QP يحتوي على B أي أن [QPB] في المثلث QBC (بديهية باش)

m يقطع QB فأنه أما يقطع QC أو BC

لايمكن أن يقطع QC أذن m يقطع BC

تمـــاريـــن :-

١) برهن على أن المستقيم المار بنقطة داخلية في مثلث ويقطع ضلع واحد فقط من ذلك المثلث فأنه يمر

بالرأس المقابل لذلك الضلع .

٢) برهن على أنه في المثلث ABC إذا كانت [ADB] و [BEC] فأنه نقطة تقاطع الضلعين AE مع CD

تكون داخلية للمثلث ABC

٣) برهن على أن النقطة تكون داخلية للمثلث إذا وفقط إذا كانت تقع بين أحد

رؤوس ذلك المثلث ونقطة على الضلع المقابل لذلك الرأس .

تعـريـــف :- إذا كان AB و AC شعاعين مختلفين وليسا على استقامة واحدة فأن إتحاد هذين الشعاعين

مع النقطة A تسمى زاوية .

مبرهنة (٣١) :- إذا كان AB , AC شعاعين ليسا على استقامة واحدة وكانت $B' \in AB$ ، $C' \in AC$

فأن BAC′ ≡ B′AC ≡ B′AC′ ≡ BAC

تعـــريـــف :- داخل الزاوية BAC هو تقاطع جهة الشعاع AC التي تحوي النقطة B وجهة الشعاع AB

التي تحوي النقطة C .

مبرهنة (٣٢) :- إذا كانت D نقطة داخلية للزاوية BAC فأن كل نقطة على الشعاع AD تكون داخلية للزاوية BAC .

البرهان :- نفرض x ∈ AD

∴. D نقطة داخلية للزاوية BAC (من الفرض)

∴. D تقع على جهة الشعاع AB التي تحوي C وتقع على جهة الشعاع AC التي تحوي B

من مبرهنة (٥، ٢٥) جميع نقاط الشعاع AD

تقع على جهة واحدة من AB ومن ضمنها النقطتين x,D

∴. C , D تقع على جهة واحدة من الشعاع AB

∴. مبرهنة (٣، ٢٦) C , x تقع على جهة واحدة من الشعاع AB

∴. x تقع على جهة الشعاع AB التي تحوي C

وبنفس الطريقة نبرهن أن النقطة x تقع على جهة واحدة من الشعاع AC التي تحوي B

∴. x تقع داخل الزاوية BAC

مبرهنة (٣٣) :- في الزاوية BAC إذا كانت P,Q نقطتين مختلفتين واقعتين على الضلعين AB و AC

على التوالي فأن كل نقطة R على الخط PQ تكون داخلية للزاوية BAC إذا وفقط إذا

مبرهنة (٣٤) :- إذا كانت D نقطة داخلية للزاوية BAC فأن الشعاع AD يقطع قطعة المستقيم BC .

تعـــريـــف :- في الزاوية BAC يقال أن الشعاع AD يقع بين الشعاعين AB و AC إذا وفقط إذا كان

الشعاع AD داخل الزاوية BAC

مبرهنة (٣٥) (البرهان للإطلاع) :- الشعاع AD يقع بين الشعاعين AB، AC إذا وفقط إذا وجدت نقاط

B′ , C′ , D′ تقع على AB , AC, AD على التوالي بحيث [B′D′C′] .

تمـــاريـــن :-

١) إذا كان AD شعاعاً واقعاً بين الشعاعين AB , AC وكان AE يقع بين AC وAD فأن AE يقع بين ABوAC .

٢) إذا كان AD يقع بين ACوAB وكان AC يقع بين AD و AE حيث E واقعة على جهة الخط AB التي تحوي D فأن AC يقع بين AB و AE .

٣) إذا كان AD شعاعاً بين الشعاعين AB و AC وكان AB′ و AC′ شعاعين معاكسين للشعاعين ABو AC

على التوالي فأن الشعاع المعاكس للشعاع AD يكون واقعاً بين الشعاعين AB′ و AC′ .

الشكل الرباعي المحدب :-

إذا كان D, C, B, A أربعة نقاط بحيث لاتوجد أي ثلاث نقاط منها على استقامة واحدة فالمجموعة المتكونة

من اتحاد النقاط D, C, B, A مع قطع المستقيمات AD, CD, BC, AB تسمى شكل رباعي ، وتسمى

النقاط D, C, B, A رؤوس الشكل الرباعي وتسمى المستقيمات AD, CD, BC, AB أضلاع الشكل الرباعي .

تعـــــاريـــف :-

١) يقال عن ضلعين في شكل رباعي بأنهما متجاورين في نقطة واحدة والضلعين الغير متجاورين هما متقابلين.

٢) زاوية الشكل الرباعي هي الزاوية التي ضلعاها ضلعين متجاورين في الشكل الرباعي .

٣) يقال عن زاويتين في الشكل الرباعي بأنهما متجاورتين إذا اشتركتا بضلع من الإضلاع . وفي الشكل

الرباعي الزاويتين غير المتجاورتين متقابلتين .

٤) يقال عن رأسي في شكل رباعي بأنهما متجاورين إذا كانا رأسي لزاويتين متجاورتين والرأسين المتقابلين

هما الرأسي الغير متجاوريين .

٥) قطر الشكل الرباعي :- هو قطعة المستقيم الواصلة بين رأسين متقابلين .

تعـريـف :- يقال عن الشكل الرباعي بأنه محدب إذا كان لأي رأسين متجاورين في رؤوسه فأن الرؤوس

الغير واقعة على الضلع المشترك تكون على جهة واحدة من خط ضلع هذين الرأسين .

التطابق والمقارنة :-

بديهيات التطابق بالنسبة لقطعة المستقيم :-

كلمة تطابق من الكلمات الأولية الغير معروفة حيث إن كل المعروف عنها أنها تستخدم لمقارنة شكلين هندسين

أو غير هندسين للدلالة على أنهما يحملان نفس الخواص والصفات وسوف نستخدم الرمز ( ) للدلالة على التطابق والرمز ( ) للدلالة على عدم التطابق .

بديهية (١*) (بـنـــاء قطعــة المستقيـم) :-

إذا كانت AB قطعة مستقيم و C نقطة على خط مستقيم مثل m فأنهُ كل شعاع على الخط m ومصدرهُ النقطة C توجد نقطة واحدة فقط مثل D بحيث أن CD AB .

بديهية (٢*) :- بالنسبة لقطع المستقيمات علاقة التطابق ( ) هي علاقة تكافؤ .

بديهية (٣*) (أضافــة قطعــة مستقيـم) :- إذا كان

a) [ABC]

b) [DEF]

c) AB DE

d) BC EF

فأنه AC DF

مبرهنة (٣٦) :- (طـرح القطـع)

إذا كان [ABC] و [DEF] و DE AB و DF AC فأنه EF BC

البرهان :- نفرض EF BC

من بديهية (١) توجد نقطة مثل Q بحيث أن

EQ EF ← BC EQ

Q ≠ F ←

∵ DE AB و EQ BC

∵ حسب بديهية (٣) DQ AC

∴ DF AC ← DF DQ ← F = Q

وهذا تناقض مع الفرض

∴ EF BC

مبرهنة (٣٧) :- إذا كانت DF AC و B نقطة بحيث أن [ABC] فأنه توجد نقطة مثل E بحيث أن

DE AB و [DEF] .

البرهان :- توجد نقطة E ∈ DF

بحيث أنه DE AB

يجب أن نبرهن E ∈ DF ← [DEF]

∵ E ∈ DF ← هنالك احتمالات للترتيب E

أما [DEF] أو [DFE]

نفرض [DFE]

∵ D-E A-B

D-F A-C

→ C-B F-E

(H.W) بالتناقض

مقـارنـــة قـطـع المستقيـم :-

تعـريـف :- تكون قطعة المستقيم AB أقل من قطعة المستقيم CD إذا وفقط اذا وجدت نقطة مثل E بحيث

أن [CED] وكذلك CE AB

AB < CD ← يوجد E على CD بحيث CE AB

مبرهنة (٣٨) :- إذا كانت AB , CD قطع مستقيم فأنه احد احتمالات التالية متحقق

AB CD ˅ CD < AB ˅ AB < CD

مبرهنة (٣٩) :- إذا كانت AB < CD و EF AB فأنه EF < CD

البرهان :- حسب تعريف (مقارنة القطع) من الفرض X ∈ CD

حسب بديهية (٢*) متعدية AB CX

(لأن CX < CD) AB EF

→ EF CX

→ EF < CD

(H.W) مبرهنة (٤٠) :- إذا كانت AB < CD و EF CD فأنه AB < EF

(H.W) مبرهنة (٤١) :- إذا كانت AB < CD و CD < EF فأن AB < EF

تطابق الزوايا والمثلثات

بديهية (٤*) (تكـويـن الزوايـا) :- إذا كانت BAC زاوية معلومة و EF شعاع معلوم على المستقيم m

فأنه على كل جهة للخط m يوجد شعاع واحد فقط مثل DE بحيث أن EDF BAC

بديهية (٥*) :- علاقة التطابق ( ) على الزوايا تكون علاقة تكافؤ .

بديهية (٦*) :- إذا كان ΔABC و ΔDEF

DE AB و DF AC و D A فأنه F C و E B

تعـريـف :- يتطابق المثلثان ΔABC و ΔDEF إذا وجد تقابل بين رؤوس وأضلاع المثلثان بحيث أن :-

A	X	AB	XY
B	Y	BC	YZ
C	Z	AC	XZ

حيث أن النقاط X, Y, Z تمثل رؤوس المثلث DEF ويرمز للمثلثان المتطابقان ABC , DEF بالرمز

ΔABC ΔDEF

مبرهنة (٤٢) (SAS) :- إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث أخر فأن المثلثان متطابقان .

البرهان :- (بالكتاب للإطلاع فقط)

تعـريـف :- يقال عن الزاويتين لهما ضلع مشترك والضلع الأخر في أحدى الزوايا يمثل الشعاع المعاكس للضلع الأخر من الزاوية الأخرى بأنهما ثنائي خطي .

*تعـريــف :- يقال عن زاويتين بأنهما متجاورتين إذا اشتركا برأس واحد وضلع واحد ويكون الضلعين الآخرين من كلا الزاويتين الواقعتين على جهتين متعاكستين من الضلع المشترك .

مبرهنة (٤٣) :- مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة .

البرهان :-

نفرض B A

يوجد ثنائي خطي X , Y X A حسب تعريف (تطابق الثنائي الخطي)*

بحيث A X B X حسب بديهية (٢*) "متعدية"

A1 Y Y C حسب تعريف (تطابق ثنائي خطي)*

B X

B1 Y

حسب تعريف تطابق ثنائي خطي Y1 D

A B

لأن X X1 ← Y1 Y

C D

مبرهنة (٤٤) :- كل زاويتين متجاورتين ومتكاملتين تكونان ثنائي خطي .

البرهان :- نفرض أن الزاويتين AOB , AOC

زوايا متكاملة ومتجاورة وأن النقطتين B , C تقعان على

جهتان مختلفتان من الشعاع OA

نفرض أن الشعاع OD هو شعاع معاكس للشعاع OB

يجب أن نبرهن أن OD OC

∴ النقطتان B , D تقعان على جهتين مختلفتين من الشعاع OA

∴ حسب مبرهنة (26،a) النقطتان C , D تقعان على جهة واحدة من الشعاع OA

∴ الشعاعين OB , OD متعاكسين

∴ الزاوية AOD هي مكملة للزاوية AOB

∴ حسب مبرهنة (٤٣) AOC AOD

← OD OC (حسب بديهية ٤*)

∴ الزاويتين AOB, AOC تكونان ثنائي خطي

*إضافــة وطـرح زاويـــة *

مبرهنة (٤٥) :- إذا كانت DEF ABC و BG شعاع داخل الزاوية ABC ومصدرهُ النقطة B فانه يوجد EH ومصدرهُ النقطة E وداخل الزاوية DEF بحيث أن

DEH ABG

و GBC HEF

البرهان :- (H . W)

مبرهنة (٤٦) :- إذا كانت ABC و DEF زاويتين وكان الشعاعين BG و EH داخليتين لهما على التوالي ومصدريهما النقطتين B , E بحيث أن CBG FEH ، HED GBA فان ABC FED

البرهان :-

من بديهية(٤*) توجد نقطة مثل M على جهة المستقيم BC التي تحوي A بحيث أن DEF MBC

يجب أن نبرهن أن ABC MBC

من مبرهنة (٤٥) توجد نقطة N بحيث أن الشعاع BN يكون داخل MBC

وأن MBN DEH و NBC HEF

ولكن من الفرض ABG DEH

وكذلك GBC HEF

MBN ABG و NBC GBC (حسب بديهية ٥*)

GBC NBC

BN ← BG

ABG MBG

← BA BM (حسب بديهية ٤*)

من بديهية (٥*) ABC MBC

∴ DEF ABC (بديهية ٥*)

مبرهنة (٤٧) (طرح الزوايا) :- إذا كانت GFH CBD و HFE DBA والشعاعين BA و FE

داخلين للزاويتين CBD و GFH على التوالي فأن EFG ABC

البرهان :- (H . W) نفس أسلوب المبرهنة (٤٦)

مـقــارنــة الـزوايـا

تعـــريـــف :- يقال أن الزاوية ABC أقل من الزاوية DEF إذا وفقط إذا وجد شعاع EG بين الشعاعين ED وEF بحيث أن GEF ABC

ويرمز لها بالرمز DEF > ABC

مبرهنة (٤٨) :- إذا كانت A و B زاويتين فأنه أحد الاحتمالات الآتية متحقق

A = B أو A < B أو B < A

البرهان :- (H . W)

حسب بديهية (٤*) يوجد شعاع AE بحيث أن DAE B

في E يوجد ثلاث احتمالات لوقوع الشعاع :-

١) أما أن يكون داخل الزاوية DAC

٢) أو خارج DAC

٣) أو يكون واقع على الضلع AC

١) إذا كان داخل الزاوية DAC ، حسب تعريف مقارنة الزوايا تكون الزاوية

DAC > DAE ← (بديهية ٥*) B > A

أما ٢) A < B أو ٣) A B

مبرهنة (٤٩) :- إذا كانت A < B و C A فأن C < B

مبرهنة (٥٠) :- إذا كانت A < B و C B فأن A < C

مبرهنة (٥١) :- إذا كانت A < B و B < C فأن A < C

تعـــريـــف :- يقال عن زاويتين بأنهما متقابلتين بالرأس إذا كان الشعاعان المولدان لأحدى الزوايا تكونان

الشعاعان المعاكسان للزاوية الأخرى .

مبرهنة (٥٢) :- الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة .

البرهان :- (H . W)

نفرض أن 1 تقابل بالرأس 2

الشعاع OA معاكس للشعاع OB (حسب تعريف التقابل بالرأس) OC معاكس لـ OD

والضلع OC هو ضلع مشترك للزاويتين أذن 1 و 3 تكونان ثنائي خطي

1.٠. مكملة 3 وبما أن OC معاكس لـ OD (بالبرهان)

و OB مشترك بين الزاويتين 3 و 2 أذن تشكلان ثنائي خطي

3 مكملة 2 وحسب بديهية (٥*) تكافؤ " أنعكاسية " كل زاوية تطابق نفسها

3 3 ومكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة 1 2

الزوايا القائمة والزوايا الغير قائمة :-

تعريف :- الزاوية التي تكون مطابقة لمكملتها تسمى زاوية قائمة والزاوية التي تكون أقل من الزاوية

القائمة تسمى زاوية حادة أما الزاوية التي ليست قائمة وليست حادة فتسمى زاوية منفرجة .

مبرهنة (٥٣) :- الزاوية الحادة أقل من الزاوية المنفرجة .

مبرهنة (٥٤) :- كل الزوايا القائمة متطابقة . (٢١٣)

الهندسة اللاأقليدية

لقد باءت جميع المحاولات لإثبات مسلمة أقليدس الخامسة بالفشل والتي نصت على أنه يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة خارجه عنه إلا أن هذه المحاولات مهدت الطريق لظهور الهندسة اللاأقليدية وذلك بسبب الفلسفة التي كانت سائدة آنذاك والتي تعتمد أو تعتقد بأن الفراغ الأقليدي موجود في عقل الإنسان سلفاً ولا يحتاج الى الخبرة وقد تم أكتشاف الهندسة اللاأقليدية على أيدي عدد من العلماء في وقتٍ واحد وفي مناطق مختلفة من العالم سوف نتطرق الى بعض من هؤلاء العلماء :-

١) كَـاوس :- لقد أستطاع تكوين بناء رياضي متآلف خلال فترة حياته حيث أعتبر فيه أنه مسلمة التوازي تختلف عن نضيرتها في الهندسة الأقليدية وأسماها الهندسة الاأقليدية حيث أفترض كَاوس

أن الفراغ لا نهائي وغير محدود لقد طور كَاوس مكتشفاتهِ في هذه الهندسة وبعث رسالة الى صاحبهُ الرياضي (نورينوس) في عام 1824 جاء فيها أن افتراض مجموع زوايا المثلث لايساوي (١٨٠) درجة يقود الى هندسة غريبة تختلف عن الهندسة اللأقليدية ولكنها متآلفة .

٢) بـولـيـا :- كان العالم بوليا صاحباً لكَاوس في ألمانيا حيث تبادلا الرسائل بعد افتراضها لبرهان المسلمة الخامسة لأقليدس فترجم بوليا مكتشفاته ونظريته وأفكاره في مجلدين أطلق عليهما أسم

(TENTAMEN) وبعث بنسخه منه الى كَاوس وكان لبوليا ولد أسمه يوحنا تعلم الهندسة على يد والده وكان له الدور الكبير في الهندسة اللاأقليدية .

٣) لوباتشوفسكي :- وهو رياضي روسي درس في جامعة كازان وعمل محاضراً فيها ليخطف الأضواء من كَاوس وبوليا وكان أول من نشر عمل متكامل عن الهندسة اللاأقليدية وكان له

دور في ظهور النظرية النسبية الخاصة .

٤) ريـمـان :- وهو عالم ألماني درس الرياضيات على يد كَاوس لم يشاركه أحد في أكتشاف نوع جديد من الهندسة اللاقليدية وكانت جميع النتائج التي توصل إليها بفضل افتراضه أن الفراغ ليس

بالضرورة أن يكون غير نهائي وغير محدود ولكن يمكن أن يكون غير نهائي ومحدود ولذلك افترض لايوجد خطوط متوازية في الهندسة الجديدة علماً أن وجود الخطوط المتوازية في الهندسة اللاقليدية يرجع الى الخطوط المستقيمة لا نهائية وغير محدودة .

جاء بعد ذلك عدة علماء منهم كلاين (Klein) الذي أقترح تسميه الهندسة التي أكتشفها كل من كَاوس وبوليا ولوباتشوفسكي بالهندسة الزائدية والهندسة التي أكتشفها ريمان بالهندسة الناقصية .

الهندسة الزائدية (الهذلولية) :-

بديهية (١) بديهية التوازي الهذلولي (HPP) :-

إذا كان m مستقيم P نقطة خارجه عنه فأنه يوجد شعاعين مثل PR و PS بحيث :-

a) PR و PS غير متعاكسين

b) PR و PS لا يشتركان مع m

c) الشعاع PQ يقطع المستقيم m إذا وفقط إذا كان يقع بين الشعاعين PR و PS

البديهية أعلاه تعني أنه يمكن رسم أكثر من مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة خارجه عنه والتي تمثل نقض بديهية أقليدس الخامسة .

هناك نموذجين للتعبير عن الهندسة الهذلولية (الزائدية) هما :-

١) نموذج كلاين :- النموذج الذي قدمهُ كلاين ينص على أن المستوي الهذلولي (الزائدي) هو عبارة عن النقاط الداخلية لدائرة في المستوي الأقليدي ومستقيمات المستوي الأقليدي هو الأوتار المفتوحة لهذه الدائرة (وتر الدائرة يسمى وتر مفتوح إذا كان لا يحتوي نقاط محيط الدائرة) .

يلاحظ في الشكل أدناه أن المستقيمين L, m اللذان يمران بالنقطة P لا يشتركان مع المستقيم n حسب تعريف

التوازي الهذلولي وحقيقة أنهما يلتقيان خارج الدائرة لا تهمنا وذلك لأنها تقع خارج المستوي الهذلولي .

٢) نموذج بون كيري :- النموذج الذي قدمهُ ينص على اعتبار المستقيمات (الخطوط) هي أقواس مفتوحة من الدوائر المعامدة لدائرة وهذه الدائرة تمثل المستوي الهذلولي (تكون دائرتان متعامدتان

إذا كانت أنصاف أقطار كل فهما المارة بنقطتي التقاطع متعامدة) .

من الشكل أعلاه أن الوتر AB يمثل خط في الهندسة الهذلولي .

مبرهنة (٥٥) :- إذا كان PR و PS شعاعان موازيان للمستقيم m النقطة P الخارجية عنه و B نقطة على m

فأن أي شعاع PQ يقع بين الشعاعين PR و PB يقطع m .

البرهان :- نفرض أن الشعاع PB يقطع المستقيم m

∴ من بديهية (HPP) الشعاع PB يقع بين الشعاعين PR و PS

نفرض PQ يقع بين PR و PB

يجب أن نبرهن أن الشعاع PQ يقطع m

∴ PQ يقع بين الشعاعين PR و PB

∴ PQ يقع بين الشعاعين PR وPS

(إذا كان BC يقع بين BD و BA وكان BD يقع بين BC و BE فأن BD يقع بين الشعاعين BA و BE)

∴ من بديهية (HPP) الشعاع PQ يقطع m

تعـريــف :- يقال أن الشعاع OD منصف للزاوية AOB إذا و فقط إذا كان D داخلية للزاوية AOB

و BOD AOD

مبرهنة (٥٦) :- لكل زاوية منصف وحيد .

مبرهنة (٥٧) :- إذا كان m مستقيم P نقطة خارجه عنه فأنه يوجد على الأقل مستقيم واحد عمودي على المستقيم m من النقطة P .

مبرهنة (٥٨) :- إذا كان الشعاعان PR و PS موازيان للمستقيم m من النقطة P فأن المنصف للزاوية RPS يكون عمودياً على m .

البرهان :- نفرض أن الشعاع PA منصف للزاوية RPS

من بديهية (HPP) الشعاع PA يقطع المستقيم m

في نقطة مثل D يجب أن نبرهن أن الشعاع PA عمودياً على m

نفرض أن PA غير عمودي على m

من مبرهنة (٥٧) يوجد شعاع مثل PB عمودياً على m

من مبرهنة (٥٦) BPS RPB

من بديهية (HPP) الشعاع PB داخل للزاوية RPS B داخلية للزاوية RPS

∴ PB يكون منصف للزاوية RPS

وهذا يناقض مبرهنة (٥٦)

∴ PD عمودي على m

المثلث الهذلولي الزائدي :-

تعـــريـــف :- إذا كان الشعاعان XP و YS شُعاعان متوازيان وكان المستقيم m قاطع لهما في نقطتين A وBبحيث أن [XAP] و [YBS] فأن إتحاد الشعاعين AP و BS و A و B وقطعة المستقيم AB يسمى المـثلـث الـهـذلـولـي ويرمز له بالرمز (T. V.T) (Two – Vettices – Triangle)

* قطعة المستقيم AB تسمى ضلع المثلث T.V.T

* الزاويتين BAP و ABS تسمى زاويتين المثلث T.V.T وكذلك تسمى الزوايا الداخلية للمثلث

* النقطتين A و B تسمى رؤوس المثلث . الزاويتين XAB و YBA تسمى زوايا خارجية للمثلث T.V.T

الزاويتان الداخليتان والخارجيتان للمثلث T.V.T اللتان ليستا متجاورتين تسميان زوايا متبادلة

*داخل المثلث T.V.T هو تقاطع جهة الخط AB التي تحتوي P وجهة الخط AP التي تحتوي B وجهة الخط

BS التي تحتوي A

النقاط الخارجية للمثلث T.V.T هي النقاط التي لا تقع داخل وعلى المثلث .

*المثلث T.V.T مع الشعاعين AP و BS وقطعة المستقيم AB سوف نمثلهُ بالشكل PABS

مبرهنة (١١٠) :- إذا كان شعاعان في الاتجاه يوازيان شعاعاً ثالثاً فأن أحدهما يوازي الأخر .(ص٢٦٨)

مبرهنة (٥٩) :- إذا كانت P نقطة ليست على المستقيم m والشعاع PR موازي للمستقيم m من النقطة P وكانت A نقطة بحيث [PAR] أو [APR] فأن الشعاع AR موازي للمستقيم m

البرهان :- (H . W)

مبرهنة (٦٠) :-

A) المستقيم المار بنقطة داخلية للمثلث RABS (T.V.T) وأحد رؤوس ذلك المثلث فأنه يقطع الشعاع المقابل لذلك الرأس .

B) المستقيم المار بنقطة داخلية للمثلث RABS ويوازي أحد الشعاعين فأنه يقطع ضلع المثلث .

البرهان :-

A) نفرض أن P نقطة داخلية للمثلث RABS

إذا كان المستقيم m يمر بالرأس B

فأنه من مبرهنة (٥٥)

الشعاع BP يقطع الشعاع AR وكذلك إذا كان المستقيم يمر بالرأس A

فأنه من مبرهنة (٥٥) الشعاع AP يقطع الشعاع BS

B) نفرض أن نقطة P نقطة داخلية للمثلث RABS

وكذلك المستقيم PD يوازي أحد الشعاعين وليكن BS

من مبرهنة (٦٠) (A) الشعاع AP يقطع الشعاع BS في نقطة مثل C

∴ المستقيم PD يقطع AC في نقطة P

∴ من بديهية باش المستقيم PD أما أن يقطع الضلع BC أو الضلع AB ولكن من الفرض PD لايقطع

الضلع BC

∴ يقطع الضلع AB

مبرهنة (٦١) :-

A) المستقيم الذي لا يمر بأي رأس من رؤوس المثلث RABS (T.V.T) ويقطع احد الشعاعين فأنه يقطع الشعاع الأخر أو الضلع .

B) المستقيم الذي لا يمر بأي رأس من رؤوس المثلث RABS ويقطع الضلع ولا يوازي أي شعاع فأنه يقطع أحد الشعاعين .

البرهان :-

A) نفرض المستقيم m يقطع الشعاع AR في نقطة مثل C

∴ المستقيم m لا يمر بأي من الرؤوس

∴ المستقيم m لا يمكن أن يكون نفس المستقيم BC

∴ داخل المثلث مجموعة غير خالية

∴ توجد نقطة D داخل المثلث RABS تقع على المستقيم m لذلك نحصل على احتمالات لوقوع النقطة D

إذا كانت D داخل الزاوية RCB فأن الشعاع CD يقع بين الشعاعين CR و BC

∴ من مبرهنة (٥٩) الشعاع CR يوازي الشعاع BS

∴ من مبرهنة (٥٥) المستقيم m يقطع الشعاع BS

إذا كانت D داخلية للمثلث ABC

∴ حسب مبرهنة (٣٠) المستقيم m يقطع الضلع AB

B) نفرض المستقيم m يقطع الضلع AB في نقطة مثل C

والمستقيم m لا يوازي أي شعاع

∴ يوجد مستقيم مثل CD يوازي أحد الشعاعين

ومن تعريف المثلث (T.V.T) (RABS) نحصل على أحد المثلثين

أما RACD أو DCBS

داخل المثلث مجموعة غير خالية

توجد نقطة T داخل المثلث RACD أو DCBS

إذا كانت T داخل المثلث RACD

∴ المستقيم m يقطع الشعاع AR (حسب مبرهنة (A ،60))

إذا كانت T تقع داخل المثلث DCBS

فأن المستقيم m يقطع الشعاع BS (حسب مبرهنة (A ،60))

النسبة التبادلية :-

إذا كانت C , B, A ثلاث نقاط على استقامة واحدة فأن نسبة تقسيم قطعة المستقيم AB بواسطة النقطة C والتي نرمز لها بالرمز (AB , C) تعرف كما يلي :-

$$(AB , C) = AC / BC$$

* إذا كانت $C \in AB$ فأن (AB , C) تكون سالبة ويسمى التقسيم تقسيم من الداخل أما إذا كانت C

AB

فأن (AB , C) تكون موجبة ويسمى التقسيم تقسيم من الخارج .

* AB = - BA

تعـــريـــف الـنـسـبـة التـبـادلـيـــة :-

إذا كانت A, B, C , D أربع نقاط على استقامة واحدة فأن النسبة التبادلية لهذه النقاط والتي نرمز لها بالرمز

(AB , CD) تعرف كما يلي :-

(AB , CD) = (AB , C) / (AB , D) = (AC/BC) / (AD/BD) = (AC.BD) / (BC.AD)

* إذا كانت C ∈ AB و D ∈ AB فأن (AB , CD) تكون موجبة

* إذا كانت C ∈ AB و D ∉ AB فأن (AB , CD) تكون سالبة

* إذا كانت A = (X1,Y1) , B = (X2 , Y2) , C = (X3 , Y3) , D = (X4,Y4)

(AB , CD) = (X3-X1).(X4-X2) / (X3-X2).(X4-X1)

= (Y3-Y1).(Y4-Y2) / (Y3-Y2).(Y4-Y1)

بـعـض خـواص الـنـسـبـة الـتـبـادلـيـة :-

1) (AB , CD) = 1 / (BA , CD)

2) (AB , CD) = 1 / (AB , DC)

3) (AB , CD) = (CD , AB)

4) (AB , CD) + (AC , BD) = 1

الأنعكاس :-

تكون النقطتان P , Q متعاكستين بالنسبة إلى دائرة معلومة مركزها O ونصف قطرها r إذا كانت

١) O, Q, P على استقامة واحدة

٢) Q , P على جهة واحدة من النقطة O

٣) $OP \cdot OQ = r^2$

$$OP = \sqrt{(X2-X1)^2 + (Y2-Y1)^2}$$

$$O = (X1, Y1) \quad , \quad P = (X2 , Y2)$$

ملاحظات :-

ـ يرمز للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r بالرمز (O)r إذا لم يكن نصف القطر ذو أهمية يرمز لها

بالرمز (O) .

ـ الدائرة (O)r تسمى بـ دائرة الانعكاس والمركز O مركز الانعكاس و r نصف قطر الانعكاس والدالة التي

تنقل P إلى Q تعُرف بأنها الانعكاس وهي تحويل بين نقاط داخل الدائرة ونقاط خارج الدائرة .

من التعريف نستنتج بأن كل نقطة داخل الدائرة لها معكوس خارج الدائرة وكل نقطة خارج الدائرة لها معكوس

داخل الدائرة يستثنى من ذلك نقطة المركز داخل الدائرة حيث ليس لها معكوس .

مبرهنة (١) :- لكل نقطة داخل الدائرة انعكاس ماعدا المركز ليس لهُ معكوس خارج الدائرة وبالعكس لكل نقطة

خارج الدائرة لها معكوس داخل الدائرة .

البرهان :- نفرض أن دائرة الانعكاس (O)r مركزها النقطة O ونصف قطرها r

وكذلك نفرض P نقطة داخل الدائرة

نرسم الوتر T T′ بحيث يكون عمودي

على نصف القطر عند النقطة P

لذلك فأن المماسان للدائرة (O)r عند النقطة T و T′ سوف يتقاطعان مع المستقيم OP في

النقطة مثل Q ومن تشابه المثلثين OPT و OTQ نحصل على

(خواص التشابه) $OP / OT = OT / OQ \leftarrow OP.OQ = (OT)^2 = r^2$

∴ Q تمثل معكوس النقطة P نفرض أن النقطة Q نقطة خارج الدائرة (O)r نرسم مماسان للدائرة (O)r من النقطة Q عند النقطتين T ، T′ الوتر TT′ يكون عمودي على نصف القطر في النقطة P والنقطة سوف

تمثل معكوس النقطة Q أي إن :-

$$OP \cdot OQ = r^2$$

P هي معكوس النقطة Q

ملاحظة :- إذا كانت P و Q نقطتين متعاكستين بالنسبة إلى الدائرة (O)r فيمكن أيجاد إحداثيات النقطة Q إذا كانت إحداثيات النقطة P معلومة ومعادلة الدائرة (O)r، لذلك نفرض إن معادلة الدائرة (O)r هي :-

$(X-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ، حيث (h,k) إحداثيات المركز و r هي نصف القطر

وإحداثيات النقطة P هي (X1,Y1) والنقطة Q هي (X2,Y2) فأن إحداثيات النقطة Q تعطى بالعلاقة التالية:-

$X2 - h = (X1-h)r^2 / (X1-h)^2 + (y1-k)^2$ .....(a

$Y2-k = (Y1-k)r^2 / (Y1-k)^2 + (X1-h)^2$ .....(b

(اشتقاق القانون H . W)

مثال :- جد معكوس النقطة P = (1,2) لدائرة الانعكاس $(X+1)^2 + Y^2 = 4$

الحل :- احداثيات النقطة Q هي (X2,Y2) ومن العلاقة b,a

$X2 + 1 = (1+1)4 / (1+1)^2 + (2-0)^2 \rightarrow X2 = 8/8 - 1 = 0$

$Y2 = (2-0)4 / 8 = 8/8 = 0 \qquad \rightarrow Q = (0,1)$

ملاحظة :- يمكن إيجاد معكوس لمنحني معلوم بدلالة المتغيرات X,Y بأستخدام التحويل

$$X-h = (X'-h)r^2 / (X'-h)^2 + (y'-k)^2 \quad .....(c$$

$$y-k = (y'-k)r^2 / (x'-h)^2 + (y'-k)^2 \quad ....(d$$

خـــواص الانـــعكـــاس :-

١) انعكاس كل مستقيم لايمر بمركز دائرة الانعكاس هو دائرة تمر بمركز دائرة الانعكاس

٢) انعكاس كل دائرة تمر بمركز دائرة الانعكاس هو مستقيم لايمر بمركز دائرة الانعكاس

٣) انعكاس دائرة تمر بمركز دائرة الانعكاس هو دائرة لاتمر بمركز هو دائرة لا تمر بمركز دائرة الانعكاس

٤) انعكاس مستقيم يمر بمركز دائرة الانعكاس هو مستقيم يمر بمركز دائرة الانعكاس

س :- نفرض أن $L : ax + by = c$ هو مستقيم لا يمر بمركز دائرة الانعكاس التي معادلتها $(X-h)^2 + (Y-k)^2 = r$ جد انعكاس هذا المستقيم ؟

الحل:- بتطبيق العلاقة d , c

$$X-h = (X'-h)r^2 / (X'-h)^2 + (y-k)^2 \quad .....(c$$

$$y-k = (y'-k)r^2 / (X'-h)^2 + (y'-k)^2 \quad .....(d$$

$$ax + by = c$$

$$X = [(X'-h)r^2 / (X'-h)^2 + (y'-k)^2] + h$$

$$Y = [(y'-k)r^2 / (X'-h)^2 + (y'-k)^2] + k$$

$$C1 = c - ah - bk$$

$$ar^2 [(X'-h) / (X'-h)^2 + (y'-k)^2] + br^2 [(y'-k) / (X'-h)^2 + (y'-k)^2] = C1$$

$$(ar^2 / C1)(X'-h) + (br^2 / C1)(y'-k) = (X'-h)^2 + (y'-k)^2$$

$$(X'-h)^2 - ar^2 / C1 (X'-h) + (y'-k)^2 - br^2 / C1 (y'-k) = 0$$

$$(X'-h)^2 - ar^2 / C1 (X'-h) + a^2r^2 / 4C1 + (y'-k)^2 - br^2 / C1(y'-k) + b^2r^4 / 4C1$$

$$= r^4 / 4C1(a^2 + b^2)$$

$$(X'-(h + ar^2 / 2C1))^2 + (y'-(k+br^2 / 2C1))^2 = [r^4 / 4(C1)^2] (a^2 + b^2)$$

إحداثيات المركز $(h + ar^2 / 2C1 , k + br^2 / 2C1)$

نصف القطر $(r^2 / 2C1)\sqrt{a^2 + b^2}$

التحويلات الهندسية :-

تعريف :- التحويل الهندسي :- هو تقابل من نقاط المستوي إلى نفسها أي أنه إذا كان π مستوي فأن

$f : \pi \to \pi$ يمثل تحويل هندسي معرف بالشكل التالي :-

لكل $p \in \pi , f(p) = p$

* التحويل f المعرف بالشكل $f(L) = L$ حيث L هو مستقيم في المستوي يسمى هذا التحويل تسامت

* يسمى التحويل f متساوي القياس إذا كان $P'Q' = PQ$ لكل نقاط P, Q حيث

$P' = f(P)$

$Q' = f(Q)$

* إذا كان π و π' مستويين متوازيين وكان $f : \pi \to \pi'$ و $g : \pi' \to \pi$ تحويلين فأن التحويل gof يسمى

إزاحة على طول المستقيم العمود على المستويين أما إذا كان المستويين متقاطعان فأن التحويل gof يسمى دوران حول المحور L حيث L هو مستقيم تقاطع المستويين

* التحويل المحايد المعرف بالشكل $i(S) = S$ هو تحويل إزاحة وليس دوران

* الانعكاس حول النقطة m هو تحويل يعين لكل نقطة في الشكل المعكوس نقطة تناظرها بالنسبة إلى النقطة m وهذا الانعكاس يكافئ دوران حول النقطة m مقدارها (180)

* الانعكاس حول المستقيم L هو تحويل يعين لكل نقطة في الشكل المعكوس نقطة تناظرها بالنسبة إلى المستقيم L ويسمى المستقيم L محور التناظر

* التحويل f يسمى تشابه من النسبة r إذا كان P'Q' = PQ لكل نقاط Q, P حيث

$$Q' = f(Q) \text{ ، } P' = f(P)$$

الهندسة الهذلولية الزائدية :-

لفرض إمكانية تصور أفكار هذه الهندسة نستعرض نموذج جون كاري

يتكون هذا الفضاء من مجموعة النقاط Y, X في المستوي بحيث Y > 0 أي كل النقاط الواقعة في الجزء

العلوي من المحور X .

وتعرف المستقيمات في هذا الفضاء بأنها الأنصاف العليا لدوائر مراكزها على المحور X وكذلك المستقيمات

العمودية على المحور X والواقعة في النصف العلوي من المحور X .

هذه المستقيمات تسمى بـ المستقيمات الهذلولية

أي المستقيمات الهذلولية تكون معادلتها في هذا

الفضاء بالشكل التالي :-

معادلة الدائرة $y = \sqrt{r^2 - (x-h)^2}$

والمستقيمات $x = a \ , \ y > 0$

تُعرف المسافة الهذلولية بين النقطتين B , A بأنها جزء قوس الدائرة المار بالنقطتين B , A ومركزها

يقع على المحور X، من اجل إيجاد قياس هذه المسافة الهذلولية نأخذ مسقطهما على المحور X مثل B′,A′

وتعُرف المسافة الهذلولية بالشكل التالي :-

$$h(AB) = 1/2 \text{ Log } (A'B' , UV)$$

$$= 1/2 \text{ Log } (A'U . B'V / B'U . A'V)$$

حيث h(AB) نعني به الطول الهذلولي بين النقطتين B , A

ملاحظة :- إذا انطبقت النقطة A على النقطة V أو النقطة B على النقطة U فان المسافة تكون لانهائية ولذلك نعتبر نقاط محور X نقاط لا نهائية

α ANV

ß BNV

فأنه ممكن إيجاد المسافة الهذلولية بدلالة الزاويتين α و β وكالاتي :-

$$h(AB) = \text{Log } (\tan(\beta/2) / \tan(\alpha/2))$$

$$\tan(\alpha/2) = \sin(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$$

$$= \sqrt{1-\cos\alpha} / \sqrt{1+\cos\alpha} = 1-\cos\alpha / \sin\alpha = \sin\alpha / 1+\cos\alpha$$

$$\tan(\beta/2) = 1-\cos\beta / \sin\beta$$

$$\exp(h(AB)) = (1-\cos ß)(1+\cos\alpha) / \sin\alpha \sin ß$$

$$\exp(-h(AB)) = (1+\cos ß)(1-\cos\alpha) / \sin\alpha \sin ß$$

ملاحظة :- إذا كانت المسافة ذات امتداد عمودي على المحور x فأنها تعرف بالشكل التالي :-

$$h(AB) = \text{Log } (UB / UA) = \text{Log } b/a$$

في حالة كون A ، B واقعتين على قوس الدائرة

$$\exp(AB) = (1-\cos ß)(1+\cos\alpha) / \sin\alpha \sin ß$$

$$\exp(-AB) = (1+\cos ß)(1-\cos\alpha) / \sin\alpha \sin ß$$

$$\cosh(AB) = \exp(AB) + \exp(-AB) / 2 = 1-\cos\alpha\cos ß / \sin\alpha\sin ß$$

$$\sinh(AB) = \exp(AB) - \exp(-AB) / 2 = \cos\alpha - \cos ß / \sin\alpha\sin ß$$

النقاط B,A ليست على استقامة واحدة في حالة A و B واقعة على المستقيم العمودي على المحور X فان

$$\text{Cosh}(AB) = b^2 + a^2 / 2ab$$

$$\text{Sinh}(AB) = b^2 - a^2 / 2ab$$

مثال :- جد المسافة الهذلولية بين النقطتين $A = (3/4 , \sqrt{7}/4)$, $B = (0,1)$

الحل :- $h(AB) = 1/2 \text{ Log } (A'B' , UV)$

(نستخدم هذا القانون لان يقع على مستقيم ليس عمودي على X ونعرفه من قيم X لـ B,A وفي المثال قيم X مختلفة)

∴ النقطتين تنتمي للدائرة $(X-h)^2 + y^2 = r^2$

النقطتان B,A تحققان معادلة الدائرة

نعوض عن النقطة A,B

$(3/4 -h)^2 + 7/16 = r^2$ ....(1

$h^2 + 1 = r^2$ ....(2

أنياً _____

$h = 0 \rightarrow r = 1$

$X^2 + Y^2 = 1$

$$h(AB) = 1/2 \text{ Log } (A'B' , UV) = 1/2 \text{ Log } (A'U.B'V) / (A'V.B'U)$$

$$= 1/2 \text{ Log } (-1-(3/4))(1-0) / (1-(3/4))(-1-0) = 1/2 \text{ Log } 7$$

$= \text{Log } \sqrt{7}$

طريقة أخرى

$$h(AB) = \text{Log } (\tan ß/2) / (\tan \alpha/2)$$

واضح أن $ß = \pi/2$

$\cos \alpha = 3/4$ $\qquad$ $\tan \alpha/2 = \sqrt{1-\cos \alpha} / \sqrt{1+\cos \alpha}$

$$= \sqrt{1-(3/4)} / \sqrt{1+(3/4)} = 1/\sqrt{7}$$

$$h(AB) = \text{Log } (\tan \pi/4) / (1/\sqrt{7}) = \text{Log } \sqrt{7}$$

(H . W) :- جد المسافة الهذلولية بين النقطتين $A = (3/4 , \sqrt{7}/4)$ ، $B = (-1/2 , \sqrt{3}/2)$

معادلة المستقيم الهذلولي الذي يمر بين نقطتين معلومتين :-

إن معادلة المستقيم الهذلولي بين النقطتين A(X1,Y1) و B(X2,Y2) هي معادلة نصف الدائرة العليا المارة

بين النقطتين A,B ويقع مركزها على محورX تعطى هذه المعادلة بالمحدد التالي :-

$$\begin{vmatrix} X^2+Y^2 & X & 1 \\ (X1)^2+(Y1)^2 & X1 & 1 \\ (X2)^2+(Y2)^2 & X2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وإذا كانت النقطتين على محور X أي إن X1=X2 في المعادلة في المحدد أعلاه فأن المعادلة تصبح بالشكل التالي :- $X = X1 = X2$ هي معادلة المستقيم

مثال :- جد معادلة المستقيم الهذلولي المار بالنقطتين A(3,2) ، B(-2,1) ثم جد المسافة الهذلولية

الحل :-

$$\begin{vmatrix} X^2+Y^2 & X & 1 \\ 13 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(أكمل الحل)

الهندسة الاهليليجة الناقصة :-

أن الهندسة الاهليليجة قائمة على أساس النقيض الثاني لبديهية اقليدس الخامسة وهي لايوجد أي موازٍ للمستقيم أي إن جميع المستقيمات متقاطعة إن النموذج الذي افترض لتحقيق هذه الهندسة هو سطح كرة مع اعتبار إن المستقيمات هي أجزاء من دوائر عظمى (الدائرة العظمى بالنسبة للكرة هي الدائرة التي يكون نصف قطرها يساوي نصف قطر الكرة)

نفرض إن معادلة الكرة $x^2+y^2+z^2 = 1$ مركز هذه الكرة هو نقطة الأصل (0,0,0) ونصف قطرها (1)

إن أي مستوي يمر بالمركز يقطع سطح الكرة بدائرة عظمى .

ملاحظة :- بين أي نقطتين على سطح كرة (ماعدا كونها نهايتي قطر من أقطارها) يوجد خط واحد فقط هو جزء الدائرة الناتج من تقاطع المستوي المتعين بالنقطتين ومركز الكرة فمثلا إذا كانت النقطتين على سطح الكرة هما A(X1,Y1,Z1) , B(X2,Y2,Z2) فأنهما تحققان معادلة الكرة وتكون معادلة المستوي المار بالنقطتين

B,A ونقطة الأصل معطاة بالمحدد الآتي :-

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X1 & Y1 & Z1 \end{vmatrix} = 0$$

X2 Y2 Z2

أن هذه المعادلة الخطية من الدرجة الأولى بالنسبة للمتغيرات الثلاثة Z,Y,X وتمر بالنقطة (0,0,0) وتحقق النقطتين B,A ولغرض دراسة الهندسة الاهليليجة على مستوي كما في الهندسة الهذلولية والاقليدية نستخدم الإسقاط الجسماني الذي ينقل جميع النقاط على سطح الكرة إلى المستوي Y,X مع اعتبار النقطة N(0,0,1) ثابتة (لها مسقط أو مسقطها في مالانهاية) فالإسقاط ليس أي نقطة P(x,y,z) من سطح الكرة على مستوي x,y

نصل بين النقطتين P,N ونمده حتى يلاقي مستوي XY في نقطة مثل Q وتكون النقطة Q هي مسقط النقطة P

إن هذا الإسقاط يولف إسقاط متباين عدا النقطة N أي إن كل نقطة على سطح الكرة (ماعدا النقطة N) توجد نقطة واحدة فقط على المستوي XY وبالعكس كل نقطة على المستوي XY توجد نقطة واحدة مقابلة لها على سطح الكرة .

خواص الإسقاط الجسماني :-

١- النقاط الواقعة على خط الاستواء (z = 0) يكون إسقاطها على نفسها .

٢- النقاط الواقعة أعلى المستوي XY (z > 0) من سطح الكرة تسقط خارج دائرة الاستواء .

٣- النقاط الواقعة أسفل المستوي XY (z < 0) من سطح الكرة تسقط على نقاط داخل دائرة الاستواء .

ملاحظة :- إذا كانت النقطة Q(s,t) في المستوي XY هي مسقط النقطة P(x,y,z) الواقعة على سطح الكرة فأنهُ يمكن إيجاد إحدى النقطتين بدلالة الأخرى باستخدام العلاقات التالية :-

1) $X = 2S / (s^2 + t^2 + 1)$

$Y = 2t / (s^2 + t^2 + 1)$

$Z = (s^2 + t^2 - 1) / (s^2 + t^2 + 1)$

2) $S = X / 1-Z$

$t = y / 1-z$ $-1 < z < 1$

مثال :- جد النقطة التي يكون مسقطها على XY هو Q (5,-2) على الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ؟

الحل :- $x = 10 / (25+4+1) = 1/3$

$y = -4 / (25+4+1) = -4/30$

$z = (25+4-1) / (25+4+1) = 28/30$

المسافة الاهليليجية بين نقطتين :-

المسافة الاهليليجية بين النقطتين p1=(x1,y1,z1), p2=(x2,y2,z2) على سطح الكرة تقدر بالزاوية المركزية التي تقابل القوس الأصغر من الدائرة العظمى المارة بالنقطتين (يجب أن تكون الزاوية مقاسه بالزوايا النصف قطرية). أي أن الزاوية P1OP2 يرمز لها بالرمز θ تحسب بالعلاقة :-

$\cos \theta = (OP1 \cdot OP2) / \|OP1\| \|OP2\|$

$= X1X2 + Y1Y2 + Z1Z2$

(لان $\|OP1\| = \|OP2\| = 1$ "لأنه يساوي نصف القطر")

وإذا كان المسقط الجسماني للنقطتين P1,P2 على المستوي XY هما النقطتين Q1(s1,t1) و Q2(s2,t2)

$\cos \theta = [4s1s2+4t1t2+ (s1^2 +t1^2 -1)(s2^2 +t2^2 -1)] / (s1^2 +t1^2 +1)(s2^2 +t2^2 +1)$

ملاحظة :- من القانون السابق نستخرج قيمة cos θ ثم نأخذ له cos^-1 ونأخذ قيمة θ بالتقدير النصف قطري ثم الناتج هو المسافة الاهليليجية t

* لكي نحول زاوية من الدرجات إلى النصف قطري نضربها بـ π/180

مثال :- جد المسافة الاهليليجية بين النقطتين Q1=(8,3)، Q=(-2,5) ؟

الحل :- $\cos \theta = (-64+60+72*28) / 30*74$

$= 2012 / 2220 = 503 / 555$

$\theta = \cos^{-1}(503/555) = 25.0002$

$= 0.4363$

بالتقدير الدائري

****

الهندسة الإفينية :-

نشأت الهندسة الافينية على يد العالم الرياضي اويلر (1783 – 1707) حيث يعتبر التوازي قاعدة أساسية إن هذه الهندسة لا تهتم بدراسة الدوائر والزوايا وإنما تعتمد على بديهيات الترتيب مضافاً إليها بديهية اقليدس الخامسة الخاصة بالتوازي لذلك تعتبر الهندسة الافينية هي الهندسة المبنية على مسلمات هندسة الترتيب مضافاً إليها مسلمة اقليدس في التوازي ، في هذه الهندسة تكون اللامعرفات هي النقطة البينية ، المستقيم أما البديهيات فتكون نفس بديهيات هندسة الترتيب مضافاً إليها البديهيتان التاليتان :-

بديهية (١) :- إذا كانت A نقطة لا تقع على المستقيم m فأنه يوجد مستقيم واحد على الأكثر يمر بالنقطة A ولا يلاقي m .

بديهية (٢) :- إذا كانت G,F,E,D,C,B,A سبعة نقاط مختلفة بحيث أنه EF,CD,AB ثلاث مستقيمات مختلفة تمر خلال النقطة G وإذا كانت AC موازي للمستقيم BD و CE موازي للمستقيم DF فأن EA موازي للمستقيم FB .

تعريف :- يسمى التحويل الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B مناقلة ويرمز لها بالرمز $A \to B$

ملاحظات :-

١- أي نقطتين A و B تعينان مناقلة وحيدة $A \to B$

٢- حاصل ضرب أي مناقلتين يكون مناقلة .

٣- حاصل ضرب المناقلتين $A \to B$ و $B \to C$ هو المناقلة $A \to C$

$$(A \to B)(B \to C) = A \to C$$

٤- إذا كان ABCD متوازي أضلاع فأن المناقلات $A \to B$ و $B \to C$ هي نفسها المناقلات $A \to D$ و $D \to C$ على التوالي وبذلك فأن حاصل ضرب كلا الترتيبين هو المناقلة $A \to C$

٥- ضرب المناقلات يكون تبديلي .

للبرهنة على ذلك سوف نستخدم الحالة البسيطة عندما يكون الشكل ABCD متوازي أضلاع

$$B \to C = A \to D \quad , \quad D \to C = A \to B$$

$$(A \to B)(B \to C) = A \to C$$

$$= (A \to D)(D \to C)$$

$$= (B \to C)(A \to B)$$

الهندسة الاسقاطية :-

كما رأينا في الهندسة الافينية (التآلفية) أن التوازي يلعب دوراً أساسياً فيها فأن في الهندسة الاسقاطية يكون التقاطع أساسياً فيها أي أنهُ لا يوجد توازي في هذه الهندسة حيثُ كل المستقيمات في المستوي تتقاطع في نقطة كذلك فأن المستوي الاسقاطي مستوي غير ترتيبي حيثُ لا وجود للدوائر والزوايا والبينية في هذه الهندسة .

أن بعض بديهيات هذه الهندسة اكتشفت على يد العالم باباس في القرن الرابع قبل الميلاد .

أن التقاطع نشأ في هذه الهندسة على اعتبار أن عائلة من المستقيمات المتوازية في الهندسة الافينية متقاطعة عند نقطة في اللانهائي لذلك اعتبر كبلر المستوي الاسقاطي هو مستوي افيني مضاف إليه مستقيم عند اللانهاية هذا المستقيم يحتوي نقاط لانهائية حيثُ كل نقطة على هذا المستقيم تلتقي فيها عائلة من المستقيمات المتوازية في المستوي الافيني ، أن نقاط لانهائية تسمى بنقاط المثالية ومستقيم لانهائي بمستقيم مثالي .

كذلك اكتشف بعض العلماء أن الهندسة الاسقاطية هو علم مستقل ويمكن الحصول منها على الهندسة الأثينية وذلك بحذف المستقيم المثالي أن أهم مايميز الاسقاطية عن بقية الهندسات هو مبدأ الثنائية .

تعريـــف :- (مهم جداً)

مبدأ الثنائية :- أن أي تعريف أو مبرهنة في الهندسة الاسقاطية يبقى صحيحاً إذا أبدلنا كلمة نقطة بمستقيم أو المستقيم بنقطة .

لذلك فالعبارات التالية متكافئة :-

مستقيم يمر بنقطة ↔ نقطة تقع على مستقيم

مستقيمان يتقاطعان في نقطة ↔ نقطتان يمر بهما مستقيم

بديهيات الهندسة الاسقاطية :-

اللامعرفات :-

النقطة ، المستقيم

بديهية (١) :- كل نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط .

بديهية (٢) :- كل مستقيمان يشتركان بنقطة واحدة على الأقل .

بديهية (٣) :- يوجد أربع نقاط مختلفة لا توجد أي ثلاث منها على استقامة واحدة .

الهندسة الاسقاطية التحليلية :-

للدخول في الهندسة الاسقاطية التحليلية نحتاج إلى بعض التعاريف :-

* إحداثيات النقطة :- هي تركيب ثلاثي من الأعداد الحقيقة (X1,X2,X3) مع اعتبار إن النقطتين (X1,X2,X3) و (λx1,λx2,λx3) نقطتين متكافئتين . حيثُ $\lambda \neq 0$

* إحداثيات المستقيم :- هي ترتيب ثلاثي من الأعداد الحقيقة [0,0,0] ≠ [a1,a2,a3]

$$a1X + a2Y + a3Z = 0$$

مع اعتبار [a1,a2,a3] و [λa1,λa2,λa3] مستقيمان متكافئان ($\lambda \neq 0$)

النقطة X = (X1,X2,X3) تقع على المستقيم [a1,a2,a3] والمستقيم a يمر بالنقطة X إذا كان

$$aX = Xa = X1a1 + X2a2 + X3a3$$

ملاحظة :- سوف نرمز لتكافؤ النقطتين والمستقيمان بالرمز (~)

أمثلة :-

النقاط التالية متكافئة $(6,8,-10) \sim (3,4,-5) \sim (-1,-4/3,5/3)$

المستقيمات التالية متكافئة $[2,1,2] \sim [6,3,6] \sim [-1,-1/2,-1]$

النقطة $P = (3,4,5)$ تقع على المستقيم $m = [2,1,2]$

$$3*2 + 4*1 - 5*2 = 0$$

معادلة المستقيم $[1,2,3]$ هي $X + 2Y + 3Z = 0$

إحداثيات المستقيم $X + 3Z = 0$ هي $[1,0,3]$

مبرهنة (١):- الشرط الضروري والكافي لكي تكون ثلاث نقاط على استقامة واحدة

$Z=(z1,z2,z3)$, $Y=(y1,y2,y3)$, $X=(x1,x2,x3)$

$$\begin{vmatrix} x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \\ z1 & z2 & z3 \end{vmatrix} = 0$$

مبرهنة (٢) :- معادلة المستقيم المار بالنقطتين

$Z= (z1,z2,z3)$, $Y= (y1,y2,y3)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y1 & y2 & y3 \\ z1 & z2 & z3 \end{vmatrix}$$

مثال :- بين فيما إذا كانت النقاط التالية على استقامة واحدة أم لا

$(1,-1,1)$, $(-1,1,0)$, $(1,0,1)$

الحل :- نحسب المحدد لهم

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

ليست على استقامة واحدة

مثال :- جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$z = -2y - x$

****

-: (H . W)

١- أثبت أن النقاط التالية على استقامة واحدة (2,1,-3) , (4,-2,4) , (10,-1,0)

2- جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (2,1,-3) , (4,-2,4)

3- بين فيما إذا كانت المستقيمات التالية متقاطعة أم لا

[-1,0,2] , [3,-4,8] , [3,3,5]

4- جد نقطة تقاطع المستقيمين [-1,10,2] , [3,3,5]

الحل :-

١)

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 & 10 & -1 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 60-8-40-12 = 0$

٢)

x y z x y

2 1 -3 2 1 = 4x-12y-4z-4z-6x-8y

4 -2 4 4 -2

= -2x-20y-8z = 0

٣)

3 3 5 3 3

3 -4 8 3 -4 = -24-24-20-18 = -66

-1 0 2 -1 0

∴ متقاطعة