مبرهنة (٦) :- إذا كانت [ABC] و [ACD] فأنه [ABCD]

البرهان :- من مبرهنة (٥) النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى استقامة واحدة

∴ [ABC]

∴ حسب بديهية (٨) احد الاحتمالات التالية متحقق

[ABCD] أو [ABDC] أو [ADBC] أو [DABC]

إذا كان [ABDC] فأنه [ADC] تناقض لأن [ACD]

إذا كان [ADBC] فأنه [ADC] تناقض لأن [ACD]

إذا كان [DABC] فأنه [DAC] تناقض لأن [ACD]

∴ الاحتمال [ABCD] متحقق .

نتيجة :- إذا كانت [ABC] و [ACD] فأنه [ABD] و [BCD]

مبرهنة (٧) :- إذا كانت [ABC] و [BCD] فأنه [ABCD]

مبرهنة (٨) :- إذا كانت [ABD] و [BCD] فأنه [ABCD]

مبرهنة (٩) :-

(١) إذا كانت [ABD] و [ACD] و $B \neq C$ فأنه [ABC] أو [ACB]

(٢) إذا كانت [ABC] و [ABD] و $C \neq D$ فأنه [BCD] أو [BDC]

(٣) إذا كانت [ABC] و [ABD] و $C \neq D$ فأنه [ACD] أو [ADC]

البرهان :- النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى استقامة واحدة حسب مبرهنة (٥)

∴ [ABD]

∴ احد الاحتمالات التالية متحققة (حسب بديهية ٨)

[ABDC] أو [ABCD] أو [ACBD] أو [CABD]

إذا كانت [ABDC] فأنه [ADC] تناقض لأنه [ACD]

إذا كانت [ABCD] فأنه [ACD] متحقق

إذا كانت [ACBD] فأنه [ACD] متحقق

إذا كانت [CABD] فأنه [CAD] تناقض لأن [ACD]

∴ أما [ABC] أو [ACB]

تعريـــف :- إذا كانت $A1 \neq \varphi$ و $A2 \neq \varphi$ مجموعتين جزئيتين من المجموعة S فأن A1 وA2 تشكل

تجزئة للمجموعة S

إذا كانت $A1 \cap A2 = \varphi$ و $A1 \cup A2 = S$

تعـريــف * :- إذا كانت O نقطة على المستقيم m وA نقطة أخرى على المستقيم نفرض أن S1 تمثل كل

النقاط على المستقيم m والتي تشمل النقاط X بحيث أن [OAX] أو [OXA]

$S1 = \{X \in m : [OXA] \text{ أو } [OAX]\}$

ونفرض أن S2 تمثل مجموعة كل النقاط Y بحيث أن [YOA]

$S2 = \{Y \in m : [YOA]\}$

فأن S1 و S2 تسمى أنصاف المستقيم m بالنسبة للنقطة O

مبرهنة (١٠) :- أنصاف المستقيم m بالنسبة للنقطة O لاتحتوي النقطة O

البرهان :- نفرض أن O ∈ S1

→ [OAO] أو [OOA]

وهذا تناقض لأنها نقاط مختلفة

∴ O S1

نفرض O ∈ S1 ← [OOA]

وهذا تناقض لأنها نقاط مختلفة

∴ O S2 و O S1

تعريـــف :- ليكن S1 ≠ φ و S2 ≠ φ مجموعتين مختلفتين ومنفصلة عن المجموعة S ونفرض ان الشروط التالية متحققة

١) لأي نقطتين A ∈ S1 و B ∈ S2 توجد نقطة C ∈ S تقع بين النقطتين A , B أي أن [ACB]
٢) لأي نقطتين A , B ∈ S1 أو A , B ∈ S2 فأنه لاتوجد نقطة C ∈ S تقع بينهما أي أنه [ACB]
غير متحقق فأنه يقال أن S تفصل S1 و S2

مبرهنة (١١) :- أي نقطة O على المستقيم m تفصل m ,L مجموعتين غير خاليتين من أنصاف المستقيم

والتي تشكل تجزئة للمستقيم m مع النقطة O

البرهان :- نفرض أن S1 ,S2 هي أنصاف المستقيم m واضح أن S1 و S2 مع النقطة O تشكل تجزئة

للمستقيم m

للبرهنة على أن النقطة O تفصل m الى مجموعتين غير خاليتين من أنصاف المستقيم

(١) نفرض أن x1 ∈ S1 و x2 ∈ S2 يجب أن نبرهن أن [x1Ox2]

$\because$ $x1 \in S1 \leftarrow [Ox1A] \vee [OAx1]$

$x2 \in S2 \leftarrow [x2OA]$

هناك ثلاث احتمالات للترتيب [x1Ox2] وهي :-

[x2OA] ^ [OAx1] أو [x2OA] ^ [Ox1A] أو x1 = A

[x2OA] ^ [OAx1] حسب بديهية (٥) [AOx2] ^ [x1AO] حسب مبرهنة (٨) نحصل على

[x1AOx2] ← [x1Ox2]

إذا كان [x2OA] ^ [Ox1A]

حسب بديهية (٨) [x2Ox1A] ← [x2Ox1]

إذا كانت x1 = A فأن الترتيب [x2OA] يصبح [x2Ox1]

(٢) نفرض أن x1 , x2 ∈ S يجب إن نبرهن أن [x1Ox2] غير متحقق .

x1 ∈ S1 ← [OAx1] ^ [Ox1A]

x2 ∈ S1 ← [OAx2] ^ [Ox2A]

→ ([OAx1]) ^ ([OAx2]) ^ ([Ox1A] ^ [Ox2A])

→ ([OAx1] ^ [Ox2A]) ^ ([Ox1A] ^ [Ox2A]) ^

([OAx1] ^ [OAx2]) ^ ([Ox1A] ^ [OAx2])

١) إذا كان [Ox1A] ^ [Ox2A] ← [Ox2x1] ^ [Ox1x2] حسب مبرهنة (1-9)

∴ [x1Ox2] غير متحقق

٢) إذا كان [OAx1] ^ [Ox2A] حسب مبرهنة (8) ← [Ox2Ax1]

← [Ox2x1]

∴ [x1Ox2] غير متحقق

٣) إذا كان [OAx2] ^ [Ox1A] حسب مبرهنة (9-3)
[Ox1x2] ← [Ox1x2] ˅ [Ox2x1]

٤) إذا كان [OAx2] ^ [OAx1]
← [Ox2x1] ˅ [Ox1x2] حسب مبرهنة (9-3)

∴ [x1Ox2] غير متحقق

إذا كانت x1, x2 ∈ S2

[x1OA] ^ [x2OA]

[x2x1O] ˅ [x1x2O] حسب مبرهنة (9-2)

∴ [x1Ox2] غير متحقق

∴ O تفصل m

ملاحظة :- المجموعتان S1 , S2 في التعريف * تسمى مجموعتان متعينة بالنقطتين O , A .

مبرهنة (١٢) :- إذا كانت A′ , A, O ثلاث نقاط مختلفة وعلى استقامة واحدة على المستقيم m فأن

أنصاف المستقيمات بالنسبة لنقطة O والمتعينة بالنقطة O , A هي نفسها أنصاف

المستقيم المتعينة بالنقطتين O , A′ .

قطع المستقيمات :- Segment

تعـريـــف :- إذا كانت A ,B نقطتين فأن قطعة المستقيم AB هي مجموعة كل النقاط X بحيث

[AXB] يرمز لقطعة المستقيم المحددة بالنقطتين A ,B بالرمز A-B أو AB

لذلك فأن A-B = AB = {X: [AXB]}

مبرهنة (١٣) :- النقطتان A , B لا تنتمي لقطعة المستقيم AB

مبرهنة (١٤) :- قطعة المستقيم A-B مجموعة غير خالية

مبرهنة (١٥) :- A-B = B-A

مبرهنة (١٦) :- A-B مجموعة جزئية من المستقيم AB

مبرهنة (١٧) :- إذا كانت A-B = C-D فأنه A=C و B=D أو A=D و B=C

مبرهنة (١٨) :- إذا كانت A-B قطعة مستقيم بحيث [APB] فأن A-P و P-B مجموعتان جزئيتان من المجموعة A-B

البرهان :- نفرض X ∈ A-P

→ [AXP] ^ [APB]

→ [AXPB] → [AXB]

X ∈ A-B

→ A-P A-B

نفرض X ∈ P-B

→ [PXB] ^ [APB]

(بديهية ٥) → [BXP] ^ [BPA]

→ [BXPA]

→ [BXA] X Є B-A

حسب) → X Є A-B

مبرهنة ١٥)

→ P-B A-B

مبرهنة (١٩) :- أي نقطة P تنتمي الى قطعة المستقيم AB تفصل AB الى مجموعتين غير خاليتين

AP و PB التي تشكل مع النقطة P تجزئة لقطعة المستقيم AB

بديهية بــاش :- The Axiom of pash

إذا كانت C , B , A ثلاثة نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة و m مستقيم لا يمر باي

من هذه النقاط ويحتوي نقطة من قطعة المستقيم AB فأنه يحتوي نقطة من القطعة AC أو BC

مبرهنة (٢٠) (مبرهنة باش) :- Pash theorem

إذا كانت C , B , A ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة وكان m مستقيم يحتوي

نقطة من قطعة المستقيم AB ونقطة أخرى من قطعة المستقيم AC فأنه لا يحتوي

نقطة من قطعة المستقيم BC

تعريف :- إذا كانت C , B, A ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة فيقال للمجموعة المتكونة

من اتحاد النقاط A , B , C مع قطعة المستقيم AB و AC و BC بالمثلث ويرمز له بالرمز

Δ ABC والنقاط A, B , C تسمى رؤوس المثلث والقطع AB و AC و BC تسمى أضلاع

المثلث .

* Home work*

١) برهن انه إذا كانت [ABCDE] فأنه A, B , C , D, E مختلفة وعلى استقامة واحدة
٢) برهن انه يوجد على الأقل خمسة نقاط مختلفة على المستقيم m
٣) برهن انه يوجد على الأقل ثلاث نقاط مختلفة بين أي نقطتين

تعـريف :- ليكن m مستقيم و P نقطة خارجة عنه نفرض S1 هي مجموعة كل النقاط X الخارجة عن

المستقيم m بالإضافة إلى النقطة P بحيث PX لا تشترك مع المستقيم m بأي نقطة.

كذلك نفرض S2 تمثل مجموعة كل النقاط Y بحيث إن PY تشترك مع المستقيم m

بنقطة فأن المجموعتان S1 , S2 تسميان أنصاف المستوي بالنسبة للمستقيم m والمتعينة

بالمستقيم m والنقطة P

$$S1 = \{X \notin m: PX \cap m = \phi\} U \{P\}$$

$$S2 = \{Y \notin m: PY \cap m \neq \phi\}$$

مبرهنة (٢١) :- أنصاف المستوي المتعينة بالنسبة للمستقيم m والنقطة P مجموعة غير خالية

البرهان :- من بديهية (٤) يوجد على الأقل خط مستقيم m

من بديهية (٣) توجد نقطة خارجه عنه مثل P

من بديهية (٢) توجد نقطة على المستقيم m مثل Q

من بديهية (١) النقط P,Q يحتويهما المستقيم PQ

من بديهية (٩) توجد نقطة Y بحيث [PQY]

$\rightarrow Q \in PY$

$\rightarrow Y \in S2 \qquad \rightarrow S2 \neq \varphi$

من بديهية (٢) توجد نقطة أخرى مثل R على المستقيم m

من بديهية (١) النقاط R , Y يمر بهما المستقيم YR

من بديهية (٩) توجد نقطة X بحيث [YRX]

حسب بديهية (١) X , P يحتويهما المستقيم PX

∴ حسب مبرهنة باش قطعة المستقيم PX لا تشترك مع المستقيم m بأي نقطة

$X \in S1 \rightarrow$

$S1 \neq \varphi$

مبرهنة (٢٢) :- ليكن m مستقيم و P و P′ نقطتين مختلفتين خارجتين عن المستقيم m فأنه أنصاف المستوي

المتعينة بالمستقيم m والنقطة P هي نفسها أنصاف المستوي

المتعينة بالمستقيم m والنقطة P′

البرهان :- نفرض أن أنصاف المستوي المتعينة بالمستقيم m و P

$S1 = \{X \quad m: PX \cap m = \varphi\} \cup \{P\}$

$S2 = \{Y \quad m: PY \cap m \neq \varphi\}$

نفرض أن أنصاف المستوي المتعينة بالمستقيم m و P'

$R1 = \{X \quad m: P'X \cap m = \varphi\} \cup \{P'\}$

$R2 = \{Y \quad m: P'Y \cap m \neq \varphi\}$

إذا كانت $P' \in S1$

نفرض أن $X \in S1 \leftarrow PX \cap m = \varphi$

يجب أن نبرهن إن $P'X \cap m = \varphi$

في ΔPQX

$\because PX \cap m = \varphi$

حسب مبرهنة (٢١) توجد نقطة $Q \in S2$

$PQ \cap m \neq \varphi$

حسب بديهية باش (ΔPQX)

$XQ \cap m \neq \varphi$

في المثلث $(\Delta P'PQ)$

بما أن $P'P \cap m = \varphi$ (من الفرض $P' \in S1$)

$PQ \cap m \neq \varphi$

$\leftarrow P'Q \cap m \neq \varphi$ (حسب بديهية باش $\Delta PP'Q$)

$QX \cap m \neq \varphi$

$QP' \cap m \neq \varphi$

$\leftarrow XP' \cap m = \varphi$ (حسب مبرهنة باش $\Delta XP'Q$)

$\rightarrow X \in R1$

$\rightarrow S2 \quad R1$

لبرهان أن $S1 \quad R1$

$X \in R1 \rightarrow X \in S1$

البرهان :- لمبرهنة (١٢)

$S1 = \{X \in m : [OXA] \vee [OAX] \vee A = X\}$

$S2 = \{Y \in m : [YOA]\}$

$R1 = \{X \in m : [OXA'] \vee [OA'X] \vee A' = X\}$

$R2 = \{Y \in m : [YOA']\}$

$[AOA'] \vee [OAA'] \vee [OA'A]$

١) $[OA'A]$

١) نبرهن $S1 = R1$ يجب أن نبرهن أن $R1 \quad S1$ أو $S1 \quad R1$

أ) نفرض $X \in S1$

$[OA'A] \wedge (A = X \vee [OAX] \vee [OXA])$

$([OA'A] \wedge A = X) \vee ([OA'A] \wedge [OAX]) \vee ([OA'A] \wedge [OXA])$

في حالة $A' \neq X$

$[OA'X] \vee ([OA'X] \vee [OXA'] \vee [OA'X])$

$\rightarrow [OXA'] \vee [OA'X] \rightarrow X \in R1 \rightarrow S1 \quad R1$

ب)نبرهن $S1 \quad R1$

نفرض $X \in R1$

$[OA'A] \wedge (A' = X \vee [OA'X] \vee [OXA'])$

$(X = A' \wedge [OA'A]) \vee ([OXA'] \wedge [OA'A]) \vee ([OXA'] \wedge [OA'A])$

$[OXA] \vee ([OXA] \vee [OAX]$ في حالة $A \neq X$) $\vee [OXA]$

$S1 \quad R1 \leftarrow X \in S1 \leftarrow [OAX] \vee [OXA]$

$\leftarrow S1 = R1$

٢) نبرهن أن $S2 = R2$

أ) نفرض $Y \in S2$

$Y \in R2 \leftarrow [YOA'] \leftarrow [OA'A] \wedge [YOA]$

$S2 \quad R2$

ب) نفرض $Y \in R2$

$Y \in S2 \leftarrow [YOA] \leftarrow [OA'A] \wedge [YOA']$

$\therefore \quad S2 \quad R2 \leftarrow S2 = R2$

٢) نفس الأولى

٣) $[A'OA]$

١) نبرهن أن $S1 = R2$

أ) نفرض $Y \in S1$

$[A'OA] \wedge (A = X \vee [OAX] \vee [OXA]$

$([A'OA] \wedge A = X) \vee ([A'OA] \wedge [OAX]) \vee ([A'OA] \wedge [OXA])$

$X \in R2 \leftarrow [A'OX] \vee [A'OX] \vee [A'OX]$

$S1 \quad R2$

ب) نفرض $Y \in R2$

$[A'OA] \wedge [YOA'] \leftarrow [A'OA] \wedge [A'OY]$ (بديهية ٥)

حسب مبرهنة (٩) ← [OAY] ∨ [OYA] في حالة Y ≠ A

Y ∈ S1 ، أما في حالة Y = A

∴ Y ∈ S1 ← (لأن A ∈ S1) ← S1 R2

∴ S1 = R2

٢) نفرض Y ∈ S2

أ) [YOA] ^ [A'OA] ← (مبرهنة ٩) [A'YO] ∨ [YA'O]

في حالة Y ≠ A'

∴ Y ∈ R1 في حالة Y ≠ A'

أما في حالة Y = A' ← Y ∈ R1 (لأنه A' ∈ R)

∴ S2 R1

ب) X ∈ R1

[A'OA] ^ (A' = X ∨ [OA'X] ∨ [OXA'])

([A'OA] ^ A' = X) ∨ ([A'OA] ^ [OA'X]) ∨ ([A'OA] ^ [OXA'])

[XOA] ∨ [XOA] ∨ [XOA]

X ∈ S2 ← S2 R1

∴ S2 = R1

H . W

١) برهن أنه إذا كان [AFB] و [BCD] فأنه توجد نقطة مثل E على المستقيم FD بحيث أن [AEC]

(حيث النقاط C , B , A ليست على استقامة واحدة)

٢) برهن أنه إذا كانت C , B ,A ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة و E , D نقطتان بحيث

أن [BCD] و [CEA] فأنه توجد نقطة F على المستقيم DE بحيث [AFB]

٣) في المثلث ABC ، إذا كان [ADB] و [AEC] و [BFC] ، فأنه قطعة المستقيم AF تقطع قطعة

المستقيم DE

٤) برهن أنه في المثلث ABC ، إذا كان [ADB] و [BEC] فأنه قطعة المستقيم CD تقطع قطعة

المستقيم AE