﴿ المفردات ﴾

البند الأول :-

أ) نشأة وتطور النظام البديهي .

ب) النظام البديهي .

جـ) أمثلة .

البند الثاني :-

أ) الهندسة المحددة .

ب) نظام اليونك .

جـ) نظام فانو.

البند الثالث :-

صفات النظام البديهي (الاستقلالية ، التوافق ، الكمال).

البند الرابع :-

لمحة تاريخية عن الهندسة قبل أقليدس .

البند الخامس :-

(النظام الاقليدي)

- تعريفه ، مكوناته ، مواطن ضعف في النظام ، بعض مكافئات بديهية أقليدس الخاصة.

البند السادس :-

(النظام الهلبرتي)

- تعريفه ، مكوناته .

البند السابع :-

مواضيع عن الهندسة الاسقاطية المستوية (التشاكلات ، بديهية فانو ، بديهية ديزارك ، المجموعات التوافقية).

البند الثامن :-

مواضيع عن الهندسة التالفية المستوية (التي لا تعتقد على التعامد)

البند التاسع :-

نظام فرضات الزمرة – هندسة التحويلات وتشمل الانعكاس ، المحوري المركزي ، الازاحة ، التطابق ، العلاقة بين هذه التحورات).

البند العاشر :-

الهندسة اللاقليدية

أ) الهندسة الهندلولية (الزائدية).

ب) الهندسة اللاهليلجية (الناقصية).

النظام البديهي :-

المسميات الاولية :(اللامعرفات)

وهي مجموعة من العناصر الخاصة بنظام بديهي ما لا تحمل أي معنى مثل (النقطة ، المستقيم ، المستوي ، العلاقة).

البديهيات (المسلمات):- Axioms

هي تعبير واضح البيان لا تحتاج إلى برهان مثال ذلك ((أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط)).

المبرهنات :- Theorems

وهي حقائق تحتاج في إثباتها إلى برهان بالاعتماد على البديهيات .

النظام البديهي :- هو مجموعة من البديهيات والكلمات الغير معرفة بالإضافة إلى عبارات من المنطق ويتكون النظام البديهي من مسميات الأولية (اللامعرفات)،

المعرفات البديهيات (المسلمات) والمبرهنات التي تعتمد في اشتقاقها على المسلمات باستخدام قوانين المنطق.

ومثال على نظام مسلمات (نظام بديهي):-

هو الهندسة المستوية لأنها تستخدم عدد من البديهيات والكلمات الغير معرفة كالنقطة والمستقيم والمستوي وأيضا تحتوي على عدة مبرهنات .

* نظام مسلمات (١) (الهندسة الإسقاطية) *

ليكن $\mathcal{S}$ نظام مسلمات مجموعة اللامعرفات فيه (النقطة ، المستقيم ، العلاقة إلى) ومجموعة البديهيات هي :-

١)

a) إذا كان كان A , B نقطتين مختلفتين فأنه يوجد على الأقل مستقيم واحد يحتويهما.

b) إذا كان A , B نقطتين مختلفتين فأنه يوجد على الأكثر مستقيم واحد يحتويهما .

٢) إذا كان ℓ مستقيم فأنه يوجد على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة عليه .

٣) إذا كان ℓ خط مستقيم فأنه توجد على الأقل نقطة واحدة خارجية عنه .

٤) يوجد على الأقل خط مستقيم واحد.

* مبرهنة (١)

يوجد على الأقل ثلاث نقاط مختلفة في نظام مسلمات (١)

البرهان :-

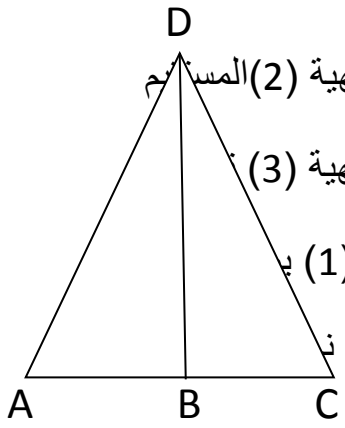
حسب بديهية(4) يوجد خط مستقيم واحد ℓ حسب بديهية (2) فأنه يوجد ثلاثة نقاط مختلفة على المستقيم ℓ

و . هـ . م

* مبرهنة (٢).

يوجد على الأقل ثلاثة مستقيمات مختلفة في نظام مسلمات (1)

البرهان :-



من بديهية (4) يوجد خط مستقيم واحد وليكن ℓ من بديهية (2)المس
ℓ يحتوي على ثلاثة نقاط مختلفة ولتكن C,B,A من بديهية (3)
نقطة نقط خارجية عن المستقيم ℓ ولتكن D من بديهية (1) ي
واحد يمر خلال النقاط (A,D) و(B,D) و(C,D) وبذلك ن
على مستقيمان CD, BD, AD

* للبرهان على أخلاف AD وBDو CD نفرض أن المستقيمان AD و BD متساويان فهذا يؤدي إلى أن النقطتان A وb تقعان على مستقيمين ABC و ABD وهذا يؤدي إلى تناقض.

∴ AD ≠ BD وبنفس الطريقة نبرهن اختلاف بقية المستقيمات .

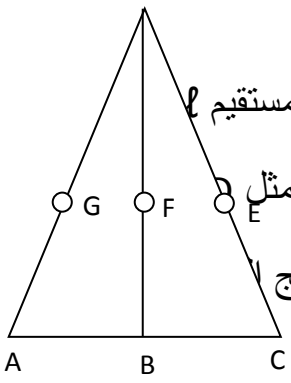
∴ المستقيمات CD,BD,AD مختلفة .

و . هـ . م

* مبرهنة (3) :-

يوجد على ألأقل سبع نقاط مختلفة في نظام مسميات (1)

البرهان:



من بديهية (4) يوجد مستقيم ℓ من بديهية (2) يحتوي المستقيم ℓ
ثلاثة نقاط ولتكن A , B , C من بديهية (3) يوجد نقطة مثل D
لا تقع على مستقيم. من بديهية (1) النقاط D,C,B,A تنتج ا
.CD,BD,AD

من بديهية (2) يحتوي ثلاثة نقاط مثل G,F,E بحيث FEBD,EEAD,GECD

∴ يوجد سبعة نقاط هي G,F,E,D,C,B,A من بديهية (2) النقاط

A . E . D مختلفة

A . F . D مختلفة

C . G . D مختلفة

* للبرهان على اختلاف النقطتين E,B نفرض أن E=B هذا يؤدي إلى أن النقطتين D,B تقعان على المستقيمين لأن B=E ~~B∈D,AD∈D~~ وهذا يناقض بديهية 1
E≠B بنفس الطريقة نبرهن اختلاف بقية النقاط

∴ النقاط G,F,E,D,C,B.A مختلفة

و . هـ .م

* Home work *

مبرهنة (4)

يوجد على الأقل سبعة مستقيمات مختلفة

مبرهنة (5)

كل مستقيمين يشتركان بنقطة واحدة على لأكثر

مبرهنة (6)

ليست كل المستقيمات تمر خلال نفس النقطة

مبرهنة(7)

كل نقطة يمر خلالها على الأقل ثلاثة مستقيمات مختلفة

نظام مسلمات (2) (الهندسة التآلفية)

(a(1) إذا كان B,A نقطتين مختلفتين فأنه يوجد على الأقل مستقيم واحد يحتويهما .

b) إذا كان B,A نقطتين مختلفتين فأنه يوجد على الأكثر مستقيم واحد يحتويهما .

(2) إذا كان ℓ مستقيم فأنه يوجد على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة علية .

(3) إذا كان ℓ خط مستقيم فأنه يوجد على الأقل نقطة واحدة خارجية عنه .

(4) يوجد على الأقل خط مستقيم واحد .

(a(5) إذا كان ℓ خط مستقيم ،P نقطة خارجية عنه فأنه يوجد على الأقل مستقيم واحد مثل m

يمربالنقطة P ولا يلاقي ℓ.

b) إذا كان ℓ خط مستقيم ،P نقطة خارجية عنه فأنه يوجد على لأكثر مستقيم واحد مثل m يمر

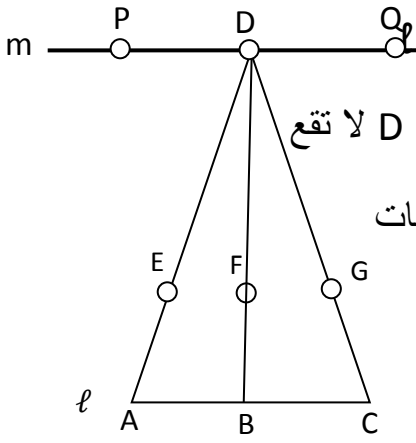
بالنقطة P ولا يلاقي ℓ .

مبرهنة (8)

يوجد على الأقل تسعة نقاط مختلفة في نظام مسلمات (2)

البرهان :

من بديهية (4) يوجد مستقيم من بديهية (2) المستقيم ℓ



يحتوي النقاط C,B,A من بديهية (3) توجد نقطة مثل D لا تقع

على ℓ من بديهية (1) النقاط D,C,B,A تنتج المستقيمات

.CD,BD,AD

من بديهية (2) يوجد النقاط G,F,E بحيث أن

GECD,FEBD,EEAD من بديهية (2) يوجد مستقيم يمر بالنقطة Dولا يلاقي ℓ وليكن m من بديهية (2) المستقيم m يحتوي Q , P

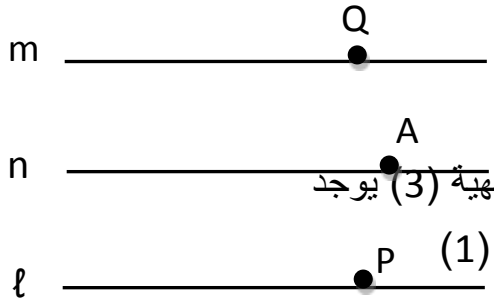
∴ توجد تسعة نقاط هي Q ,P,G,F,E,D,C,B,A جميع هذه النقاط مختلفة لأنه لو تطابق أي نقطتين منها فأنه يؤدي إلى وجود نقطتين مختلفتين وهذا يناقض البديهية (1.b)

و . هـ . م

مبرهنة (9)

يوجد على الأقل مستقيمان موازيان لمستقيم معلوم.

البرهان :-



من بديهية (4) يوجد مستقيم مثل ℓ .

بديهية (2) المستقيم ℓ يحتوي النقطة P من بديهية (3) يوجد نقطة خارجية مثل Q عن مستقيم ℓ من بديهية (1) يوجد مستقيم يمر بالنقطتين Q ,P

من بديهية (5) يوجد مستقيم مثل m يمر بالنقطة Q ولا يلاقي ℓ . من بديهية (2) المستقيم QP يحتوي نقطة مثل A . من بديهية (5) يوجد مستقيم مثل n يمر بالنقطة A ولا يلاقي ℓ .

∴ المستقيمات n , m مختلفة وتوازي المستقيم ℓ

و . هـ . م

Home work

مبرهنة (10)

المستقيم الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الأخر

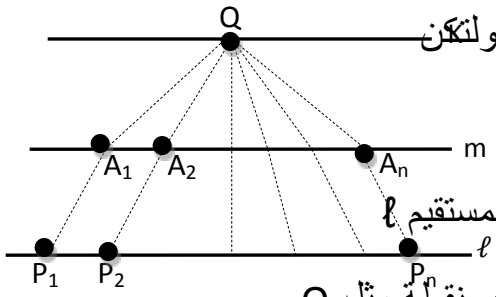
مبرهنة (11)

المستقيمان المتوازيان لمستقيم معلوم متوازيان .

مبرهنة (12)

إذا كان ℓ مستقيم يحتوي n من النقاط فقط فأنه أي مستقيم يوازيه يحتوي n من النقاط فقط .

البرهان :-



نفرض أن ℓ مستقيم يحتوي n من النقاط فقط ولتكن

النقاط فقط ولتكن النقاط $P_n.....,P_2 , P_1$

حسب مبرهنة (9) يوجد مستقيمان موازيان للمستقيم ℓ

وليكن K, m من بديهية (2) المستقيم K يحتوي نقطة مثل Q.

من بديهية (1.a) نحصل على المستقيمات $QP_n,.....QP_2 , QP_1$.

والتي تكون مختلفة حسب (1.b) حسب مبرهنة (10) هذه المستقيمات تقطع المستقيم m عند النقاط $A_n ,.....A_2,A_1$

∴ يوجد n من النقاط على المستقيم m .

نفرض انه يوجد نقطة أخرى على المستقيم m ولتكن A_{n+1} حسب بديهية (1.a) النقطتان

Q, A_{n+1} يحتويهما المستقيم QA_{n+1} حسب مبرهنة (10) المستقيم QA_{n+1} يقطع المستقيم ℓ بنقطة مختلفة عن النقاط $P_n,..... P_2 , P_1$ وهذا يناقض الغرض بأن ℓ يحتوي فقط n من النقاط .

∴ المستقيم m يحتوي n من النقاط فقط .

و . هـ . م

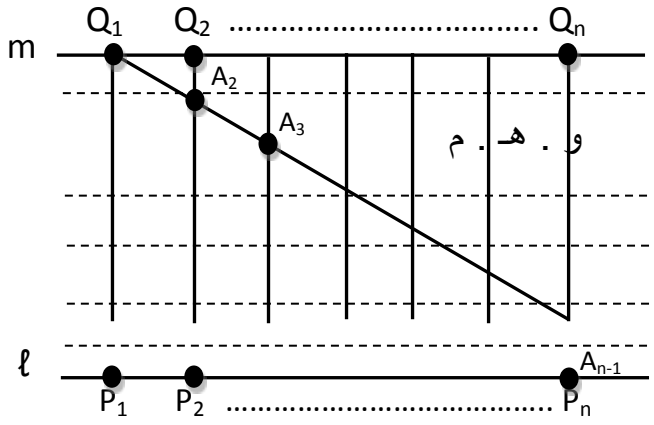
مبرهنة (13) :-

إذا كان ℓ مستقيم يحتوي n من النقاط فأنه يوجد بالضبط n-1 من المستقيمات التي توازيه .

البرهان :-

نفرض أن ℓ مستقيم يحتوي n من النقاط ولتكن P_1 , P_2 ..... P_n, من بديهية (3) توجد نقطة مثل Q خارجية عن المستقيم ℓ .من بديهية (5) يوجد مستقيم مثل m يمر بالنقطة Q_1 ويوازي ℓ. من بديهية (1) النقطتان P_n , Q_1 تكون المستقيم P_nQ_1 حسب مبرهنة (12) المستقيم m يحتوي النقاط Q_n,....., Q_2, Q_1 من بديهية (5) المستقيمان Q_iP_i (i=1,2,.....,n) توازي المستقيم Q_1P_1 حسب مبرهنة (10) المستقيم Q_1P_n يقطع المستقيمان Q_iP_i عند النقاط A_i (i=1,2,.....,n) حسب بديهية (5) يوجد n-2 من المستقيمات الموازية للمستقيمℓ والتي تمر بالنقاط Ai نفرض أنه يوجد مستقيم مثل K يوازي ℓ . من مبرهنة (10) المستقيم Q_1P_n يقطع المستقيم K في النقطة مثل D. من بديهية (5) يوجد مستقيم مثل r يمر بالنقطة D ويوازي Q_1- P_1 من مبرهنة (10) المستقيم r يقطع m بنقطة مختلفة وهذا يناقض مبرهنة (12)

∴ عدد المستقيمات التي توازي المستقيم ℓ هي فقط n-1 .



Home work

مبرهنة (14)

إذا كان ℓ مستقيم يحتوي n من النقاط فقط فأنه أي مستقيم يحتوي n من النقاط فقط.

مبرهنة (15)

إذا كان ℓ خط يحتوي n من النقاط فأنه كل نقطة يمر خلالها (n+1) من المستقيمات .

مبرهنة (16)

إذا كان ℓ خط يحتوي على n من النقاط فأنه :-

1) عدد النقاط الكلية هو n^2.

2) عدد الخطوط الكلية هو n (n+1)

الهندسة المنتهية :-Finite geometry

الهندسة المنتهية : هو نظام بديهي يكون فيه عدد العناصر التي تدل عليها (المسلمات) محدداً .

* سوف نقوم بدراسة بعض الانظمة المنتهية مثل :-

1) نظام يونگك young system

2) نظام فانو Fano system

نظام المسلمات يونگك:-

a(1) إذا كانت B,A نقطتين مختلفتين فأنه يوجد على الأقل مستقيم واحد يحتويهما .

b) إذا كانت B,A نقطتين مختلفتين فأنه يوجد على الأكثر مستقيم واحد يحتويهما .

2) إذا كان ℓ ط مستقيم فأنه يوجد على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة عليه .

3) إذا كان ℓ ط مستقيم فأنه يوجد على الأقل نقطة واحدة خارجية عنه .

4) يوجد على الأقل خط مستقيم .

5) a من نقطة Q لا تقع على خط معلوم ℓ يوجد على الأقل خط يمر بالنقطة Q ولا يلاقي ℓ.

b) من النقطة Q لا تقطع على خط معلوم ℓ يوجد على الأكثر خط يمر بالنقطة Q ولا يلاقي ℓ .

6) إذا كان ℓ خط فأنه يوجد على الأكثر ثلاثة نقاط مختلفة عليه .

مبرهنة (17)

عدد النقاط الكلي في نظام المسلمات يونگك هو تسعة نقاط فقط

* برهن على أن عدد الخطوط الكلية في نظام مسلمات يونگك هو 12

* برهن على أن الخطوط المارة بنقطة واحدة هو 4

ملاحظة :- إذا مثلنا النقطة بعدد والمستقيم بعمود في المصفوفة فأنه التمثيل الأتي يعطي نموذج لنظام المسلمات يونگك حيث تتحقق فيه كل المسلمات .

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5
2	4	6	8	4	5	7	4	6	5	7	6
3	5	7	9	6	8	9	9	8	7	8	9

ملاحظة :- عند رسم نموذج فأننا نلاحظ عدم استقامة بعض المستقيمات وكذلك توجد مستقيمات تتقاطع في الرسم ولكنها غير متقاطعة في النموذج وذلك لأن هذا النموذج هو لتحقيق نظام مسلمات يونك فقط.

نضام مسلمات فانو:- Fano System

١) a)أذا كانت a,b نقطتين مختلفتين فأن يوجد على الأقل مستقيم واحده تحتويهما.
b)أذا كانت a,b نقطتين مختلفتين فأنه يوجد على الأكثر مستقيم واحد يحتويهما.
٢) أذا كان ℓ خط مستقيم فأنه يوجد على الاقل ثلاث نقاط مختلفه عليه.
٣) أذا كان ℓ خط مستقيم فأنه يوجد على الاقل نقطه واحده خارجه عنه.
٤) يوجد على الأقل خط مستقيم.
٥) كل مستقيمين يشتركان بنقطه واحده.
٦) أذا ℓ خط مستقيم فأنه يوجد على الأكثر ثلاث نقاط خارجه عنه.

مبرهنة:-

يوجد سبع نقاط مختلفة في نظام فانو فقط.
*نبرهن أن كل نقطه يمر خلالها ثلاث نقاط مختلفة.
*نبرهن أن عدد خطوط الكلية سبعه فقط.
نموذج يحقق نظام فانو:-
نمثل النقطة بعدد تمثل المستقيم بعمود في المصفوفة.

١	١	١	٢	٢	٣	٣
٢	٤	٦	٤	٥	٤	٥
٣	٥	٧	٦	٧	٧	٦

ومن الشكل نلاحظ انه المستقيم (٢،٤،٦)لم يظهر بشكل مستقيم ولكن النموذج يحقق نظام فانو.

ملاحظة:

أذا قمنا بتعميم نظام مسلمات فانو إلى n من النقاط في المستقيم في كل نقطه في البديهية ٢ وبديهيه ٦ فأننا نحصل على ما يسما نظام فانو وال>ي يكون فيه عدد نقاط الكلي هو

$$(n^2 - n + 1).$$

صفات نظام البديهي:-

لعل السؤال الذي يتبادل على الذهن هل تصح أي مجموعه من المسلمات لبناء نظام بديهي؟

أن الاجابه بل النفي طبعا وذلك لان هناك صفات تخص المسلمات بعضها لازم واجب تحققه وبعضها مرغوب فيه عند بناء أي نظام بديهي ومن هذه الخواص هيه :-

١) التآلف(التناسق) consistency
٢) الاستقلالية independence
٣) الاكتمال completeness
٤) التصنيف catagoricalness

أولا:- التآلف (التناسق):-

يقال لمجموعه من المسلمات متناسقة (متسقة) أذا لم تكن متناقض هاو لا يمكن استنتاج نتيجة متناقضة مع إحدى المسلمات أو المبرهنات أو نتائج المبرهنات لنظام بديهي أي انه إذا كانت هناك عبارتان متناقضتان في نضام بديهي فان أحداهما فقط صحيح والأخرى خاطئة فإذا كانت p مسلمه أو مبرهنة في نظام مسلمات فأن p~ لا يمكن أن تكون مسلمة أو مبرهنة وهذا يعني لإثبات تناسق النظام مسلمات لابد أن نضع إمامنا مسلمات ومبرهنات النظام التي يمكن إثباتها وهذا بل الطبع غير ممكن.

∴ السؤال هنا كيف يمكن إثبات تألف مسلمات نظام بديهي.

الجواب:إذا نجحنا في تكوين نموذج متناسق فان مسلمات النظام و المبرهنات تكون متناسقة وانه تناسق نظام بديهي أمر ضروري وليس مرغوب فيه.

ثانيا:- الاستقلالية :-

تكون مسلمه مستقلة في نظام بديهي أذا لم يكن بل الإمكان اشتقاقها من بقية مسلمات النظام أو لم يكن بالإمكان البرهنة على صحتها بالاعتماد على بقيه بديهيات النظام ويكون النظام البديهي مستقلا أذا كانت جميع بديهياته مستقلة.

ملاحظة:-

نستطيع أن نتأكد من استقلالية مسلمة في النظام البديهي أذا أمكن تشكيل نموذج (أو تكوين نموذج)بحيث يحقق كافة مسلمات النظام ماعدا البديهية التي مراد أثبات استقلاليتها فإذا كان $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ مسلمات نظام بديهي بحيث متسق وكانت ش المسلمات $a_1 \ldots a_i, \ldots \sim a_n$

أيظآ متسق فأن المسلمة a_i مستقلة.

س//برهن انه نظام مسلمات (٢) هو نظام متسق ومستقل.

ج//نفس نموذج النظام مسلمات يونك يثبت اتساق مسلمات (٢) أو نكتب نموذج مسلمات يونك حي يكون استقلال نظام مسلمات (٢)

للبرهنة على استقلاليه بديهيه(١.a)

*(١a.)~ يوجد نقطتين مختلفتين a,b بحيث لا يوجد مستقيم يحتويهما .

١ ٤
٢ ٥
٣ ٦

النموذج أعلاه يحقق كافة المسلمات عدى مسلمه 1.a أذن مسلمه 1.a مستقلة.

*(1.b)~ يوجد نقطتين a,b مختلفتين يحتويهما أكثر من مستقيم واحد .

١ ٣ ١ ٢ ٢ ١ ٢ ١ ٤ ١
٢ ٤ ٣ ٤ ٣ ٤ ٣ ٤ ٥ ٢
٦ ٥ ٥ ٦ ٥ ٦ ٦ ٥ ٦ ٣

النموذج أعلاه يحقق كافة المسلمات عدى مسلمة .١b أذن المسلمة 1.b مستقلة.

*(٢)~ أذا كان ℓ مستقيم توجد عليه الأقل ثلاث نقاط مختلفة .

١ ٢ ٢
١ ٣ ١
٤ ٣ ٤
٢ ٤ ٣

النموذج أعلاه يحقق كافة المسلمات عدى مسلمة (٢) أذن المسلمة (٢) مستقلة.

*(٣)~أذا كان ℓخط مستقيم لا توجد نقطه خارجه عنه .

١
٢
٣

النموذج أعلاه يحقق كافة المسلمات عدى مسلمه (٣) أذن المسلمة (٣) مستقلة.

*(٤)~لا يوجد خط مستقيم.

النموذج أعلاه يحقق كافة المسلمات عدى مسلمه (٤) أذن المسلمة (٤) مستقلة.

*(5.a)~ أذا كان ℓ خط مستقيم وb نقطه خارجه عنه فلا يوجد مستقيم يمر بل نقطه b ولا يلاقي المستقيم ℓ.

٢ ٢ ٣ ٣

١ ١ ١

٦ ٤ ٦ ٧

٢ ٤ ٦

٥ ٧ ٤ ٥

٣ ٥ ٧

النموذج أعلاه يحقق كافة المسلمات عدى مسلمة (5.a) أذن المسلمة (5.b) مستقلة.

*~(5.b)

موجود في الكتاب صفحه ٥٥.

ثالثا :- الاكتمال (الكمال):-

من الصعب معرفة القدر الذي نحتاج آلية من المسلمات فنحن تريد نظام وافر من المسلمات بحيث أذا أعطى أي عبارة فأنه يمكن أثبات صحت العبارة أو نفيها من مسلمات النظام ونضرياته و أذا تعذر ذلك فأنه يعني انه هناك مسلمه لم يتطرف أليه بعد.

تعريف :-

يكون النظام الجديد مكتمل أذا لم يكون بألأمكن أضافه مسلمه مستقلة للنظام بحيث يبقى النظام متسق ومستقل .

أن هذا التعريف لا يساعد في إثبات اكتمال النظام البديهي لهذا نلجأ إلى استخدام خاصية التصنيف.

رابعا:- التصنيف:-

أذا كان s_1, s_2 نموذجين يمثلان النظام المسلمات فأنه يقال أنهما متشاكلين (متماثلين isomorphic) أذا وجد على الأقل تقابل (شامل و متباين) بين عناصر المجموعة (s_1, s_2)

بحيث يحفظ العلاقات في ذلك النظام .

تعريف:-

يقال للنظام المسلمات ما أنه تصنيفي (قطعي) أذا كان كل نظام نموذجين في نظام متشاكلين .

مبرهنة:-

كل نظام تصنيفي يكون مكتمل .

البرهان :- نفرض ان النظام البديهي تصنيفي يتكون من البديهيات التاليA_N, $A_1, A_2, \ldots$

∴ يمكن اضافة بديهيه مستقلة ولتكن B الى مجموعه البديهيات $A_1, A_2, \ldots, A_N$

∴ B بديهية مستقلة فأن

١) المجموعة $A_1, A_2, \ldots, A_N, B$ متسقة

٢) المجموعة$A_1, A_2, \ldots, A_N, \sim B$ متسة

∴ يوجد نموذج للمجموعة (١)ونموذج للمجموعة (٢)بما ان النظام تصنيفي فأن هذين النموذجين يكونان متشاكلين لذلك فالعبارات في النموذجين أما كل منهما صائبة او كل منهما خاطئة وهذا غير ممكن النموذج B تكون صائبة في نموذج وتكون B~ صائبة في نموذج الأخر وهذا غير ممكن.

∴كل نظام تصنيفي مكتمل.

مثال:-برهن أن النظام يونك مكتمل .

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7	ℓ_8	ℓ_9	ℓ_{10}	ℓ_{11}	ℓ_{12}
١	١	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣	٣	٤	٥
٢	٤	٦	٨	٤	٥	٧	٤	٥	٦	٧	٦	
٣	٥	٧	٩	٦	٨	٩	٩	٧	٨	٨	٩	

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}
	١	١	١	٢	٢	٢	٣	٣	٩	٤	٥	
١												
	٣	٦	٨	٣	٥	٦	٧	٤	٥	٧	٩	
٢												
	٥	٩	٧	٩	٧	٨	٦	٨	٦	٩	٨	
٤												

H.W:- برهن ان نضام يونك مكتمل

٣	٢	١	٧	٤	١
٦	٥	٤	٨	٥	٤
٩	٨	٧	٩	٦	٣

٢	٢	١	١	١	١
٥	٣	٧	٥	٣	٢
٦	٩	٩	٨	٦	٤

H.W:- في النظام البديهي التالي

١) أي مستقيمين مختلفين يتقاطعان في نقطه واحده.

٢) كل نقطه يمر لها مستقيمان فقط.

٣) توجد بل الضبط أربعة مستقيمان في هذا النظام.
اثبت التالي:-
١) بين أن النظام متسق .
٢) حاول إيجاد نموذج لإثبات استقلالية كل بديهية في هذا النظام.
٣) برهن على انه كل مستقيم في هذا النظام يحتوي على ثلاثة نقاط فقط.

مقدمه لكتاب الأصول لأقليدس

الهندسة :- هي فرع من فروع الرياضيات والتي تتفاعل مع الأشكال في المستوي والفراغ وهي من المواضيع القديمة .

يعد كتاب الأصول لأقليدس من أعظم الكتب في الهندسة والتي أثرت في تطوير الرياضيات حيث يمتاز بكونه أول كتاب نجد فيه روح البرهنة الرياضية السليمة والتي أصبحت فيما بعد مناراً لأنظمة المنطق .

لم يعرف على وجه التحديد متى نشر كتاب الأصول كما لم يعرف شيء عن مولد أقليدس أو موته فكل الذي نعرفه إن كتابه نشر بحدود (٣٠٠ ق.م) في مدينة الإسكندرية في مصر وقد عاش معظم حياته أستاذاً في جامعة الإسكندرية لقد علم أقليدس والذين سبقوه من الفلاسفة أنه لا يمكن أثبات كل شيء وعند بناء أي هيكل منطقي يجب قبول بعض القضايا بدون برهان ثم استنتاج القضايا الأخرى بأسلوب متسلسل ومرتب لأن كل محاولة في إثبات جميع القضايا تدور في حلقة مفرغة ففي الهندسة لا يمكن بناء برهان بدون فرض لأن الإثبات المنطقي لابد أن يرتكز على نقطة ابتداء مفروضة بدون مناقشة .

إن أقليدس أستعمل كتابه في الهندسة المستوية بثلاث وعشرون تعريف وعشر فرضيات وثمان وأربعون مبرهنة مع براهينها بشكل مرتب . هناك بعض التعاريف التي تطرق إليها أقليدس ومنها : -

١) النقطة :- وهي ما كان مجرد من الأبعاد .
٢) الخط :- وهو طول بدون عرض .
٣) حدود الخط :- هي نقاط .
٤) الخط المستقيم :- هو خط يمتد بإنتظام مع النقاط التي عليه .
٥) حدود السطح :- هي خطوط .

٦) يكون الشكل الرباعي مربعاً إذا كان متساوي الأضلاع وزواياه قائمة ويكون مستطيلاً إذا كانت
زواياه قائمة ويكون معيناً إذا كانت زواياه المتقابلة وأضلاعه المتقابلة متساوية وما عدا هذه الحالات

يسمى الشكل الرباعي منحرف .

٧) المستقيمان المتوازيان :- هما الواقعان في مستوي واحد وإذا مُدا إلى أي من الجهتين لا يلتقيان أبداً

لقد وضع أقليدس عشر بديهيات (فرضيات) بشكل مجموعتين المجموعة الأولى سميت بالمفاهيم العامة

وهي افتراضات مقبولة في كل العلوم وعند كل الناس المفكرين ولا تقبل المناقشة والجدل وهي :-

١) الأشياء المساوية لشيء واحد متساوي .
٢) إذا أضيفت كميات متساوية إلى أخرى متساوية كانت النتائج متساوية .
٣) الأشياء المتطابقة تكون متساوية .
٤) إذا طرحت كميات متساوية كانت البواقي متساوية .
٥) الكل أكبر من الجزء .

المجموعة الثانية سميت بالمسلمات وهي أفتراضات مقبولة في الهندسة فقط وهي :-

١) من الممكن وصل أي نقطتين بخط مستقيم .
٢) يمكن مد قطعة المستقيم من الجهتين إلى غير حد .
٣) يمكن رسم دائرة إذا علم مركزها ونصف قطرها .
٤) الزوايا القائمة متطابقة أو متساوية .
٥) إذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث وكان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على واحده من القاطع أقل من الزاويتين القائمتين فإن المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع إذا مدا إلى غير حد .

سوف نجد أن البديهية (٥) كانت مثار لجدل بين علماء الرياضيات لأكثر من ألفي عام . وكان من نتائج

هذا الجدل اتساع أفاق الفكر في الهندسة والرياضيات وأدى أخيراً إلى أكتشاف الهندسة الأقليدية التي لها ذلك

ذلك الأثر الكبير على النظرية النسبية . لقد وضع أقليدس ثمان وأربعون مبرهنة وبرهن جميع المبرهنات

حيث برهن أول ثمان وعشرون مبرهنة دون أستعمال البديهية (٥) وكان أول أستعمال لهذه البديهية عندما

برهن المبرهنة (٢٩) أن هذا العمل لم يقبل به الرياضيون الذين جاءوا بعده مما جعل قسم منهم يعتقد أن

البديهية (٥) يجب أن تصبح نظرية ولذا وجب أن يكون لها برهان ولقد جرت عدة محاولات لبرهنة هذه

البديهية ولكن جميعها باءت بالفشل وكانت تدور في حلقة مفرغه لان البراهين التي وضعت كانت تصل

بصوره مباشرة أو غير مباشرة إلى حقيقه أو بديهيه تكافئ البديهية (٥) لأقليدس .

*بعض مكافئات بديهية أقليدس الخامسة *

لقد وجد عدد كبير من مكافئات بديهية أقليدس (٥) من محاولات علماء في برهنتها نذكر قسم من هذه

المكافئات :-

١) بديهية بليفر :- من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم موازٍ واحد فقط لمستقيم معلوم .
٢) إذا قطع مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فأنه يقطع الأخر.
٣) المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان.
٤) إذا قطع مستقيم مستقيمان متوازيان فأن الزاويتان الداخليتان المتبادلتان متساويتان.
٥) بديهية لاجندر :- مجموع زوايا المثلث تساوي زاويتين قائمتين.
٦) يوجد زوج من المثلثات المتشابهة .

٧) بديهية بروكلس :- المسافة العمودية لمستقيمين متوازيين تكون ثابتة .
٨) إذا كانت ثلاث زوايا في شكل رباعي قوائم فأن الزاوية الرابعة قائمة .

أسس الهندسة:-

سوف نعتبر النقطة والمستقيم مواد أولية غير معرفة (لامعرفات) وسوف نرمز للنقاط بالحروف الكبيرة

والمستقيمات بالحروف الصغيرة كذلك سوف نبدأ بتكوين نظام بديهي عناصرهُ مجموعة من البديهيات

والتعاريف والمبرهنات وتكون كل هذه العناصر مع اللامعرفات موضوعنا الأساسي .

** بديهيات الوجـــــود والوقـــوع **

بديهية (*) :- المستقيم هو مجموعه من النقاط والنقطة غير معرفه .

بديهية (١) :- كل نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط .

بديهية (٢) :- كل مستقيم يحتوي نقطتين مختلفتين على الأقل .

بديهية (٣) :- إذا كان L خط مستقيم فأنه توجد على الأقل نقطة واحده خارجه عنه .

بديهية (٤) :- يوجد على الأقل خط مستقيم .

نلاحظ أن المواد الأولية هي النقطة، المستقيم. لم تُعرف بشكل مباشر ولكنها شُخصت من خلال البديهيات

وأصبحت ذات معنى مثل البديهية (*). فالبديهية (*) لاتمثل تعريف المستقيم بقدر ماتفيدنا بتوضيح العلاقة

بين النقطة والمستقيم. أن وظيفة البديهيات هي تميز بين المصطلحات الموجودة في دراستنا .

مبرهنة (١):- يوجد على الأقل ثلاث نقاط مختلفة .

مبرهنة (٢):- كل نقطة يمر خلالها مستقيمين مختلفين على الأكثر .

مبرهنة (٣):- يوجد على الأقل مستقيم واحد لا يمر بنقطة معلومة .

مبرهنة (٤):- يتقاطع المستقيمان على الأكثر بنقطة واحده .

ملاحظة:- من البديهية (١) يتعين المستقيم بنقطتين لذلك إذا كان المستقيم يتعين بالنقطتين A , B فسوف

نرمز له بالرمز AB أو BA أو نرمز له بالحروف الصغيرة مثل m .

سوف نستخدم الرمز (=) للتعبير عن المساواة بين المستقيمات أو النقاط.

علاقـــــة التـرتـيـب :-

سوف نعتبر علاقة المتوسط (البينية) علاقة غير معرفة كذلك سوف نرمز [ABC] والذي يعني أن النقطة

B تقع بين النقطتين AC وأن النقاط C, B, A على استقامة واحدة .

بديهية (٥):- [ABC] ↔ [CBA]

بديهية (٦):- إذا كانت [ABC] فأن النقاط A ، B ، C مختلفة وعلى أستقامة واحدة.

بديهية (٧):- إذا كانت A، B، C ثلاث نقاط مختلفة وعلى أستقامة واحدة فأن أحد الاحتمالات الآتية متحققة

[ABC] أو [ACB] أو [BAC] .

ملاحظة :- من بديهية(٧) نلاحظ أنه لكل ثلاث نقاط مختلفة وعلى أستقامة واحدة يوجد ثلاث احتمالات

لترتيبها لذلك إذا كانت A,B,C,D أربع نقاط مختلفة وعلى أستقامة واحدة فأن أحد احتمالات

الحصول على ثلاث نقاط مختلفة وعلى أستقامة واحدة هي :-

A,B,C,D

[BAC] أو [ACB] أو [ABC]

[ABD] أو [ADB] أو [DAB]

[DAC] أو [ADC] أو [ACD]

[BDC] أو [CBD] أو [BCD]

بديهية (٨):- إذا كانت A,B,C,D أربعة نقاط مختلفة وعلى أستقامة واحدة وكانت [ABC] فان احد

الاحتمالات الآتية متحقق [ABCD] أو [ABDC] أو [ADBC] أو [DABC]

بديهية (٩):- إذا كانت A , B نقطتين مختلفتين فأن :-

١) توجد نقطة مثل C بحيث أن [ABC]
٢) توجد نقطة مثل D بحيث أن [ADB]
٣) توجد نقطة مثل E بحيث أن [EAB]

ملاحظة :- إذا كانت C = D فأن [ABD] = [ABC] وإذا كانت [ABD] = [ABC] فليس من

الضروري أن تكون C = D .

مبرهنة (٥) :- إذا كانت [ABC] و [ACD] فأن A ,B, C, D مختلفة وعلى أستقامة واحدة .

البرهان :- من بديهية (٦) A, B, C, مختلفة وعلى أستقامة واحدة وكذلك A, B, C, D

للبرهنة على أن B ≠ D نفرض B = D

← [ABC] و [ACB] وهذا يناقض بديهية (٧)

∴ النقاط A, B, C, D مختلفة

∴ النقاط B , D على أستقامة واحدة مع A , C

∴ النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى أستقامة واحدة .