معادلات متعدد الحدود Polynomial Equations

في الرياضيات، المعادلات الحدودية أو معادلات متعددات الحدود Polynomial equations هي معادلات تأخذ الشكل التالي:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \cdots + a_0 X + a_0 = 0$$

حيث a_i, معاملات المعادلة, والهدف هو إيجاد جميع قيم المجهول x. ونقول أن كثير الحدود من الدرجة الأولى إذا كانت أعلى قوة لـ X تظهر في المعادلة هي واحد. وهي من الدرجة الثانية إذا كانت أعلى قوة لـ X هي اثنين وهكذا. إذن نقول أن كثيرة الحدود من الدرجة n إذا كانت أعلى قوة لـ X هي n. وتقول المبرهنة الأساسية في الجبر أن لكل معادلة حدودية من الدرجة n يوجد عدد n من الحلول (ذلك إذا احتسبنا الحلول المكررة أي التي يجب أن نعدها مرتين). كما تجدر الإشارة إلى أن كل معادلة حدودية ذات معاملات تنتمي إلى الأعداد الحقيقية إن كان لها حلول تنتمي إلى الأعداد المعقدة فإن هذه الحلول تكون دائما مترافقة أي أنه يكون دائما هناك حل في شكل $a + ib$ وآخر في شكل $a - ib$. اولاً لنفرض ان لدينا معادلة من الدرجة الثانية:$aX^2 + bX + c = 0$ ، لكي نجد جذور العدد X نتبع الآتي:

ننقل c الى الطرف الاخر والقسمة على a الذي لا يساوي الى الصفر نحصل على

$$X^2 + \frac{b}{a}X = -\frac{c}{a}$$

نستخدم طريقة اكمال المربع، بإضافة $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ الى طرفين المعادلة اعلاه

$$X^2 + \frac{b}{a}X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$X + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وبالتالي نحصل على

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة $X^2 + (2i-3)X + (5-i) = 0$.

الحل: باستخدام الحل بطريقة الدستور:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{-2i + 3 \pm \sqrt{-4 - 12i + 9 - 20 + 4i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2}$$

الان نحاول ان نجد الجذرين $\sqrt{-15-8i}$ من خلال المعادلة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}\right) \qquad for \quad b < 0$$

$$X_{1,2} = \sqrt{-15 - i8} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + \sqrt{225+64})} - i\sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{225+64})}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15 + \sqrt{289})} - i\sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{289})}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-15+17)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(15+17)}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(2)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(32)}\right) = \pm(1-4i)$$

وبالتالي فأن جذران $\pm\sqrt{-15-8i}$ هما $\pm(1-4i)$ وبالتالي:

$$X_{1,2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2} = \frac{3 - 2i \pm (1-4i)}{2}$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = 2 - 3i$ و $X_2 = 1 + i$.

اما بالنسبة الى معادلات متعددة الحدود من الرتب العالية فنتبع الطرق الموضحة في الأمثلة التالية:

مثال: جد جذور الحقيقية والمعقدة المترافقة لمعادلة متعددة الحدود التالية:

$$6X^4 - 25X^3 + 32X^2 + 3X - 10 = 0$$

الحل: نأخذ العوامل الاولية لكل من المعاملات $a_4 = 6$ و $a_0 = -10$ وتكون:

عوامل $a_4 = 6$ هي $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ وعوامل $a_0 = -10$ هي $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. نقسم عوامل a_0 على a_4 على شرط ان لا يكون هنالك قاسم مشترك بين العوامل ما عدا ± 1 فنحصل على الحلول الجذرية الحقيقية الممكنة:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 5, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{5}{6}, \pm 10, \pm \frac{10}{3}$$

نجرب الحلول الجذرية الحقيقية في المعادلة متعددة الحدود، نختار فقط الحلول الجذرية التي تجعل المعادلة تساوي الصفر. من خلال ذلك نجد ان $X_1 = -\frac{1}{2}$ و $X_2 = \frac{2}{3}$ **هما الجذران الحقيقيان لمعادلة متعدد الحدود.** نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$$\begin{array}{l|ccccc}
 & 6X^4 & -25X^3 & +32X^2 & +3X & -10 \\
-\frac{1}{2}) \times & 6 & -25 & 32 & 3 & -10 \\
 & & -3 & 14 & -23 & 10 \\
\hline
\frac{2}{3}) \times & 6 & -28 & 46 & -20 & 0 \\
 & & 4 & -16 & 20 & \\
\hline
 & 6 & -24 & 30 & 0 & \\
\end{array}$$

نرى ان ناتج القسمة يقبل القسمة على 6 وبالتالي نحصل على

$$1 \quad -6 \quad 5$$

وبالتالي:

$$6X^4 - 25X^3 + 32X^2 + 3X - 10 = (2X + 1)(3X - 2)(X^2 - 4X + 5)$$

الان نستخدم طريقة الدستور لإيجاد جذور $(X^2 - 4X + 5)$

$$X_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = -\frac{1}{2}$ و $X_2 = \frac{2}{3}$ و $X_3 = 2 + i$ و $X_4 = 2 - i$

مثال: وجد الجذور الخيالية للمعادلة $X^4 - 5X^2 - 10X - 6 = 0$ اذا علمت بأن الجذور الحقيقية هي-1 و3.

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$-1) \times$	1	0	-5	-10	-6
		-1	1	4	6
$3) \times$	1	-1	-4	-6	0
		3	6	6	
	1	2	2	0	

وبالتالي فأن

$$X^4 - 5X^2 - 10X - 6 = 0 = (X+1)(X-3)(X^2+2X+2)$$

نستخدم طريقة الحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام الدستور (X^2+2X+2) لغرض استخراج الجذور الخيالية:

$$X_{3,4} == \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

اذن الحلول هي $X_1 = -1$ و $X_2 = 3$ و $X_3 = -1 + i$ و $X_4 = -1 - i$

مثال: وجد الجذر التربيعي للمعادلة $2X^4-3X^3-7X^2-8X+6=0$ اذا علمت بأن الجذور الحقيقية هي $\frac{1}{2}$ و 3.

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

$\frac{1}{2}$) ×	2	− 3	− 7	− 8	6
		1	− 1	− 4	− 6
3) ×	2	− 2	− 8	− 12	0
		6	12	12	
	2	4	4	0	

وبالتالي فأن

$$2X^4-3X^3-7X^2-8X+6=0=(2X-1)(X-3)(2X^2+4X+4)$$

نستخدم طريقة الحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام الدستور $(2X^2+4X+4)$ لغرض استخراج الجذور الخيالية: حيث نقسم طرفيها على 2 لنحصل على (X^2+2X+2):

$$X_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm i$$

اذن الحلول هي $X_1=\frac{1}{2}$ و $X_2=3$ و $X_3=-1+i$ و $X_4=-1-i$

مثال: وجد الجذر التربيعي للمعادلة $X^3-7X^2+19X-13=0$ اذا علمت بأن الجذر الحقيقي هو 1 .

الحل: نعمل على ايجاد الجذور الخيالية من خلال القسمة الطويلة:

1) ×	1	− 7	19	− 13
		1	− 6	13
	1	− 6	13	0

وبالتالي فأن

$$X^3 - 7X^2 + 19X - 13 = 0 \ = (X-1)(X^2 - 6X + 13)$$

نستخدم طريقة الحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام الدستور $(X^2 - 6X + 13)$ لغرض استخراج الجذور الخيالية:

$$X_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$$

اذن الحلول هي $X_1 = 1$ و $X_2 = 3 + 2i$ و $X_3 = 3 - 2i$