الجذر التربيعي للعدد المعقد Square root of complex number

الان يمكننا أن نستخرج الجذر التربيعي للعدد المعقد، لو فرضنا ان العدد $z = a + ib$ ، فأننا نبحث عن جذور العدد $X = x + iy$ بحيث ان $X^2 = z$:

$$X^2 = (x + iy)^2 = z = a + ib \qquad \dots\dots(1a)$$

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib \qquad \dots\dots(1b)$$

من (1b) نجد ان

$$x^2 - y^2 = a \qquad \dots\dots(2)$$

$$2xy = b \qquad \dots\dots(3)$$

من المعادلات اعلاه نجد:

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \qquad \dots\dots(4)$$

من المعادلات (2) و (3) و (4) نحصل على:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \dots\dots(5)$$

بجمع المعادلتان (2) و (5)

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \qquad \dots\dots(6a)$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \qquad \dots\dots(6b)$$

بطرح المعادلتان (2) و (5)

$$2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \qquad \dots\dots(7a)$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \qquad \dots\dots(7b)$$

لاحظ أن هذه الكميات x و y موجبة أو صفرية بغض النظر عن العلامة a. المعادلات (6) و (7) صحيحة في العموم، قيمتان متعاكستان لـ x واثنان لـ y. ولكن لا يمكن الجمع بين هذه القيم بشكل اعتباطي ، بالنسبة للمعادلة ($2xy = b \quad \dots\dots(3)$) ليست نتيجة للمعادلات (6) و (7) ، لذلك يجب أن نكون حذرين لتحديد x و y بحيث يكون لحاصل ضربهما علامة b وبالتالي نناقش الحالتين التاليتين:

الحالة الاولى: عندما $b \neq 0$

أ) $b > 0$ حيث ان x و y لهما نفس الاشارة.

ب) $b < 0$ حيث ان x و y لهما الاشارات مختلفة.

بجذر المعادلة $(1a)$ وتعويض المعادلتان $(6b)$ و $(7b)$

$$X_{1,2} = \sqrt{a+ib} = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right) \quad for \;\; b > 0$$

$$X_{1,2} = \sqrt{a-ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right) \quad for \;\; b < 0$$

الحالة الثانية: عندما $b = 0$

$$X^2 = a$$

$$X_{1,2} = \pm\sqrt{a} \qquad for \;\; a > 0$$

$$X_{1,2} = \pm i\sqrt{a} \qquad for \;\; a < 0$$

الحالة الثالثة: عندما $a = b = 0$

$$X_{1,2} = 0$$

مثال: حل (جد الجذر التربيعي) المعادلة التالية: $X^2 = -i$

الحل:

$$a = 0, \qquad b = -1 \qquad , b < 0$$

بما ان $b < 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a - ib} = x - iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right)$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = +\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $X_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

مثال: حل (جد الجذر التربيعي) المعادلة التالية: $X^2 = -5 + 12i$

الحل:

$$a = -5, \qquad b = 12 \qquad , b > 0$$

بما ان $b < 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a + ib} = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-5 + \sqrt{25 + 144}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{25 + 144}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-5 + 13)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(5 + 13)}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(8)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(18)}\right) = \pm(2 + 3i)$$

وبالتالي فأن الجذرين الخياليين هما: $X_1 = +(2 + 3i)$ $X_2 = -(2 + 3i)$

مثال: جد الجذر التربيعي للعدد العقدي $X^2 = \frac{-1+5i}{2+3i}$.

الحل: نجد حاصل القسمة من خلال الخطوات التالية:

$$\frac{-1+5i}{2+3i} = \frac{-1+5i}{2+3i}\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{13+13i}{4+9} = 1+i$$

بما ان $b > 0$ نستخدم العلاقة التالية:

$$X_{1,2} = \sqrt{a+ib} = x+iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+1})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+1})}\right)$$

$$X_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})}\right)$$

$$X_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})}\right)$$

$$X_2 = -\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})}\right)$$