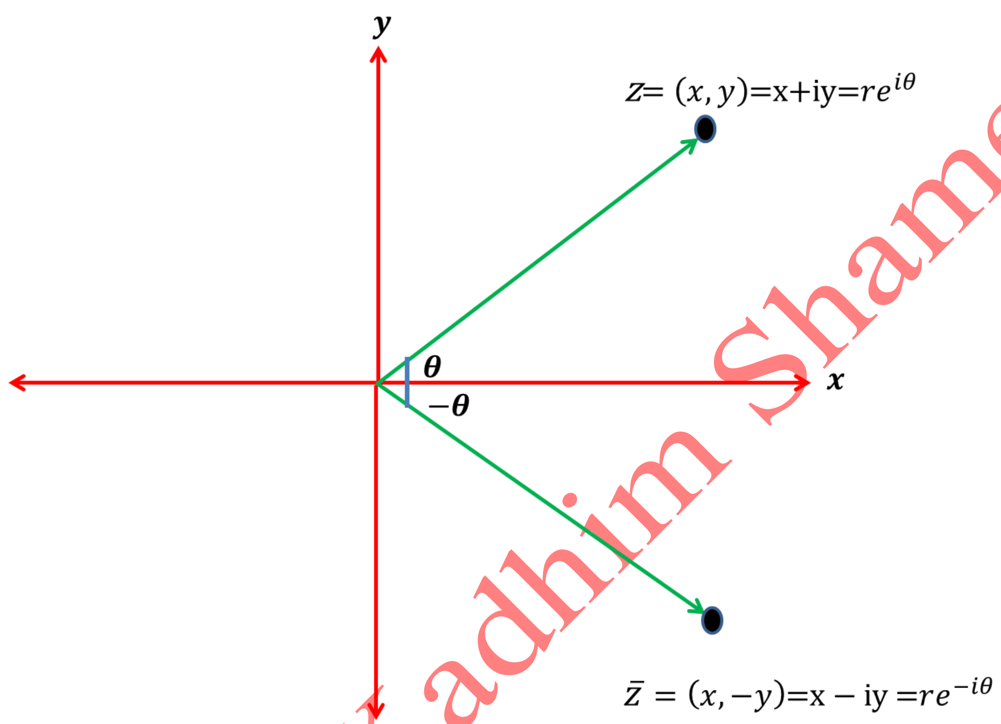
المترافق المعقد للعدد العقدي Complex Conjugate

اذا كان $z = x + iy$ ، فأن المترافق المعقد للعدد العقدي z والذي يرمز له بالرمز $\bar{z}$ يكون $\bar{z} = x - iy$.
يمثل $\bar{z}$ هندسياً بالنقطة $(x, -y)$ وهو انعكاس بالنسبة الى المحور الحقيقي x وكما بالشكل ادناه:



الشكل(٤).

ان زوج النقاط (x, y) و $(x, -y)$ في المستوي العقدي هي صورة مرآة لكل منهما حيث ان x هو المرآة كما في الشكل اعلاه. لذا فأن z و $\bar{z}$ بالصيغة القطبية لهما نفس قيمة r ، لكن قيمة θ هي سالب احدهما الاخر. فاذا كتبنا :

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

فأن

$$\bar{z} = r\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta} \qquad (7)$$

ان مرافق كل عدد حقيقي $z = x + i0$ هو العدد نفسه.

$$\bar{z} = \overline{x + i0} = x - i0 = z$$

اما اذا كان $z = 0 + iy$ عدد تخيلي صرف، فأن مرافقه المعقد هو $-z$

$\bar{z} = \overline{0 + iy} = 0 - iy = -z$

اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ فأن:

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

وبنفس الطريقة يمكن ان نبرهن على ان

$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$

$\overline{z_1 - z_2} = x_1 - x_2 - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

اما بالنسبة الى $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ فيكون:

$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

بالنسبة الى $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad eq(1)$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} \cdot \frac{x_2 + iy_2}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + ix_1y_2 - ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \qquad eq(2)$$

من المعادلات ١ و ٢ نحصل على المساواة.

ان حاصل جمع العدد المعقد والمترافق المعقد هو $z + \bar{z} = 2x$ وحاصل طرحهما هو $z - \bar{z} = 2iy$

، وبالتالي فأن الجزء الحقيقي والخيالي بدلالة كل من العدد العقدي والمترافق المعقد يكون:

$$Re\{z\} = x = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$Im\{z\} = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

اما ناتج حاصل ضربهما $z\bar{z}$ فيكون

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = \bar{z}z = |z|^2$$

ومنها نجد ان

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$$

تمرين: افرض ان $z = 4 + 3i$ و $\bar{z} = 4 - 3i$ جد الجزء الحقيقي والخيالي لهما:

مثال بسط (جد ناتج) $\left|\frac{(3+4i)\overline{(2-i)}}{1+3i}\right|$ حيث ان $|z| = |\bar{z}|$

الحل:

$$\left|\frac{(3+4i)\overline{(2-i)}}{1+3i}\right| = \frac{|3+4i||\overline{(2-i)}|}{|1+3i|} = \frac{\sqrt{9+16}\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+9}} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

مثال: بسط (جد ناتج) $(2+i)\overline{(1+3i)} - 2 + 4i$.

الحل:

$$(2+i)\overline{(1+3i)} - 2 + 4i = (2+i)(1-3i) - 2 + 4i$$

$$= 2 - 6i + i + 3 - 2 + 4i = 3 - i$$

مثال: افرض ان $z_1 = 4 + 3i$ و $z_2 = 2 + 5i$ ، جد الجزء الخيالي للعدد العقدي z_1 وحاصل ضرب $\overline{z_1 z_2}$:

الحل:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{(4+3i)+(2+5i)} = (4-3i) + (2-5i)$$

$\overline{6+8i} = 6-8i$

$6-8i = 6-8i$

$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

$\overline{(4+3i)-(2+5i)} = (4-3i)-(2-5i)$

$\overline{2-2i} = 2+2i$

$2+2i = 2+2i$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{(4+3i)(2+5i)} = \overline{(-7+26i)} = -7-26i$

$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (4-3i)(2-5i) = -7-26i$

$$Re\{z_1\} = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(4+3i)+(4-3i)}{2} = 4$$

$$Im\{z_1\} = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(4+3i)-(4-3i)}{2i} = 3$$

مثال: جد $(\bar{z}_3)^4$ اذا علمت بأن $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

الحل:

$$(\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^4 = \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{3}{4} i^2\right]^2 = \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right]^2 = \left[\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{3}{4} i^2\right] = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$