المتجهات

Vectors

في هذا الفصل سنلقي نظرة مختصرة على المتجهات و بعض خواصها. سنتناول في هذا الفصل المواضيع الآتية:

1 .المتجهات (بعض المبادئ الأولية).

2.بعض العمليات على المتجهات.

3.الضرب العددي.

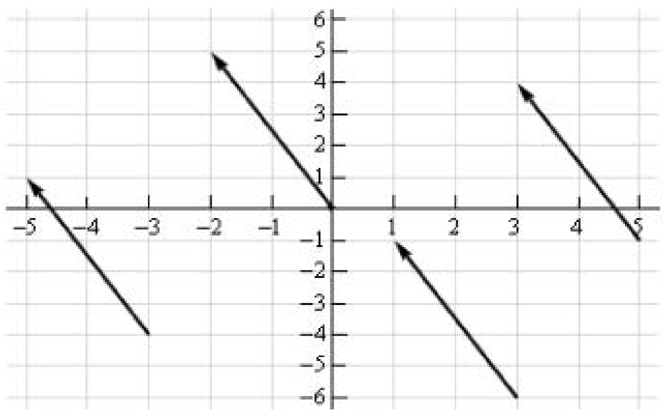
4. الضرب ألاتجاهي.

المتجهات (بعض المبادئ الأولية)

دعنا نبدأ الفصل بفائدة المتجهات و لماذا تستخدم. تستخدم المتجهات لتمثيل الكميات التي تمتلك مقداراً و اتجاهاً. كالسرعة و القوة مثلاً. لتعريف القوة نحتاج لان نعرف مقدارها و اتجاهها.

يمكن أن نمثل المتجه بخط له اتجاه يمثل طول الخط مقداره و اتجاه الخط هو اتجاه المتجه.

أن أية قوة مسلطة على نقطة ما باتجاه معين يمكن تسليطها على أية نقطة في الفضاء بنفس الاتجاه و المقدار. أي أن القوة لا تعتمد على النقطة المسلطة عليها. لاحظ الرسم في الأسفل:



أن كل قطعة في الرسم أعلاه تمثل نفس المتجه. في كل حالة يبدأ المتجه من نقطة معينة بعدها يتحرك وحدتين إلى اليسار و خمس وحدات إلى الأعلى. و سنرمز لها بالرمز $\vec{v} = \langle -2,5 \rangle$.

يمثل المتجه كمية واتجاه المقدار بينما تمثل النقطة الموقع في المستوي.

أن تمثيل المتجه $\vec{v} = \langle a_1, a_2 \rangle$ في الفضاء ذي البعدين هو اية قطعة مستقيم $\overrightarrow{AB}$ من النقطة $A = (x, y)$ و حتى النقطة $B = (x + a_1, y + a_2)$ اما تمثيل المتجه $\vec{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ في الفضاء ثلاثي الابعاد هو قطعة المستقيم $\overrightarrow{AB}$ من النقطة $A = (x, y, z)$ و حتى النقطة $B = (x + a_1, y + a_2, z + a_3)$. يمثل المتجه $\vec{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ الذي يبدأ بالنقطة

$A = (0,0,0)$ و ينتهي بالنقطة $B = (a_1, a_2, a_3)$. بما يسمى متجه الموقع *position vector* للنقطة (a_1, a_2, a_3).

و ألان كيف نستخرج متجه علمت نقطتا بدايته و نهايته.

أن المتجه الذي يبدأ بـالنقطة $A = (a_1, a_2, a_3)$ و ينتهي بالنقطة $B = (b_1, b_2, b_3)$ هو:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

لاحظ الاتجاه بدقة إذ أن المتجه الذي يبدأ بالنقطة $B = (b_1, b_2, b_3)$ و ينتهي بالنقطة $A = (a_1, a_2, a_3)$ يمكن تمثيله بالصورة:

$$\overrightarrow{BA} = \vec{v} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

مثال. اكتب المتجه لكل مما يأتي:

a. المتجه من $(2, -7, 0)$ إلى $(1, -3, -5)$.

b. المتجه من $(1, -3, -5)$ إلى $(2, -7, 0)$.

c. متجه الموقع إلى $(-90, 4)$.

الحل. a. $\langle -1, 4, -5 \rangle$.

b. $\langle 1, -4, 5 \rangle$.

أن المتجهين في a و b مختلفين بالإشارة فقط و هذا يبين أن لهما نفس المقدار لكنهما متعاكسين بالاتجاه.

c. $\langle -90, 4 \rangle$.

تعريف. أن **طول** *length* المتجه $\vec{v} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ هو:

$$\|\vec{v}\| = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

مثال. جد طول كل من المتجهات الآتية:

$$a.\quad \vec{a} = \langle 3, -5, 10 \rangle$$

$$b.\quad \vec{u} = \langle 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5} \rangle$$

$$c.\quad \vec{w} = \langle 0, 0 \rangle$$

$$d.\quad \vec{u} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

.الحلa.

$$\|\vec{a}\| = (9 + 25 + 100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{134}.$$

باقي الفروع تترك كتمرين للطالب.

ملاحظة. أذا كان $\|\vec{a}\| = 0$ فان $\vec{a}$ هو المتجه الصفري.

تعريف. أي متجه طوله يساوي واحد يسمى متجه الوحدة unit vector .

تمرين. أيا من المتجهات في المثال أعلاه يمثل متجه الوحدة؟

تعريف. يسمى المتجه $\vec{w} = \langle 0,0 \rangle$ المتجه الصفري zero vector.

ملاحظة. 1.في الفضاءات ثلاثية الأبعاد توجد ثلاث متجهات للقاعدة الأساس standard basis vector وهي:

$$\vec{\imath} = \langle 1,0,0 \rangle \quad , \quad \vec{\jmath} = \langle 0,1,0 \rangle \quad , \quad \vec{k} = \langle 0,0,1 \rangle$$

أما في الفضاءات ثنائية الأبعاد يوجد متجهين للقاعدة الأساس هما:

$$\vec{\imath} = \langle 1,0 \rangle \quad , \quad \vec{\jmath} = \langle 0,1 \rangle$$

2. لا تقتصر المتجهات على الفضاءات ثنائية و ثلاثية الأبعاد بل يتعدى ذلك إلى الفضاءات ذات البعد - n n-dimensional space و تكون متجهاتها بالصيغة:

$$\vec{v} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$$

أن كل a_j تدعى مركبة component للمتجه.

في دراستنا الحالية سنتعامل مع المتجهات ثنائية و ثلاثية المركبات للسهولة.

جبر المتجهات vector algebra

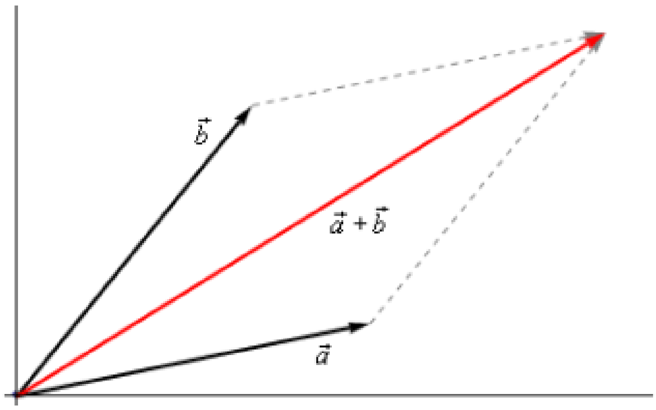
نبدأ بجمع المتجهات: أن حاصل **جمع** addition المتجهين

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad \text{و} \quad \vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

يعطى بالصيغة:

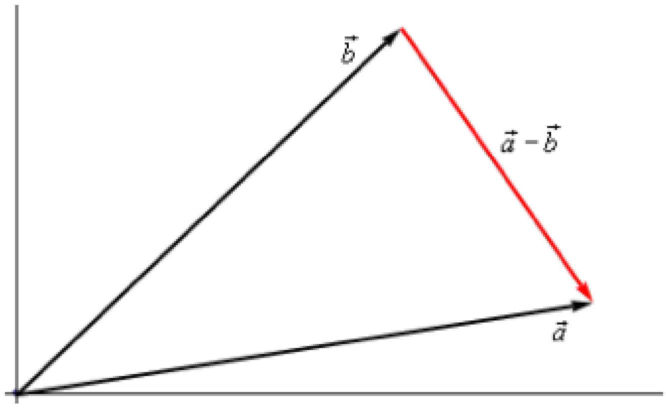
$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle}$$

أما التفسير الهندسي لحاصل جمع متجهين نوضحه بالرسم الآتي و الذي يطلق عليه أحيانا قانون المثلث أو قانون متوازي الأضلاع parallelogram law or triangle law.

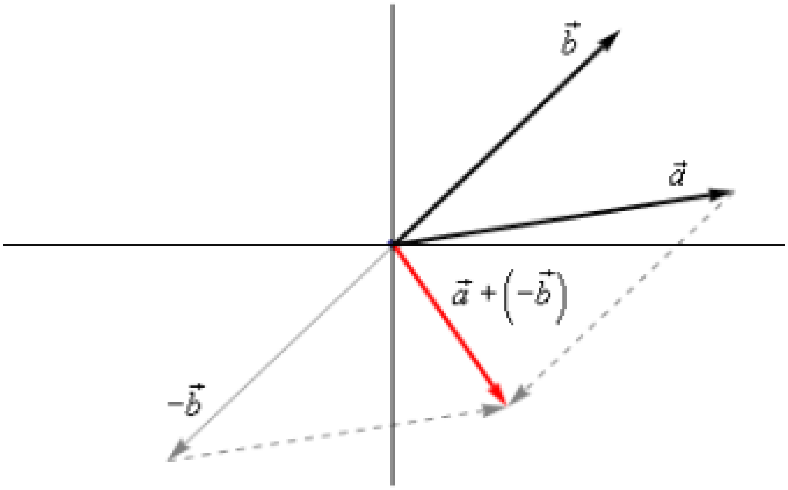


حسابياً يكون طرح subtraction متجهين مشابهاً لجمعهما.

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\langle a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\rangle}$$



ملاحظة. ربما نتساءل لماذا يكون التفسير الهندسي لطرح متجهين بهذه الصورة ؟ و يكون التفسير كما في الرسم الموضح في الأسفل ، أي نتعامل مع $\vec{a}-\vec{b}$ بالصورة $\vec{a}+(-\vec{b})$



ملاحظة. لا يمكن أن نجمع أو نطرح متجهين ما لم يكن لهما نفس العدد من المركبات.

أما عملية ضرب المتجه بثابت scalar multiplication فإنها تكون كآلاتي:

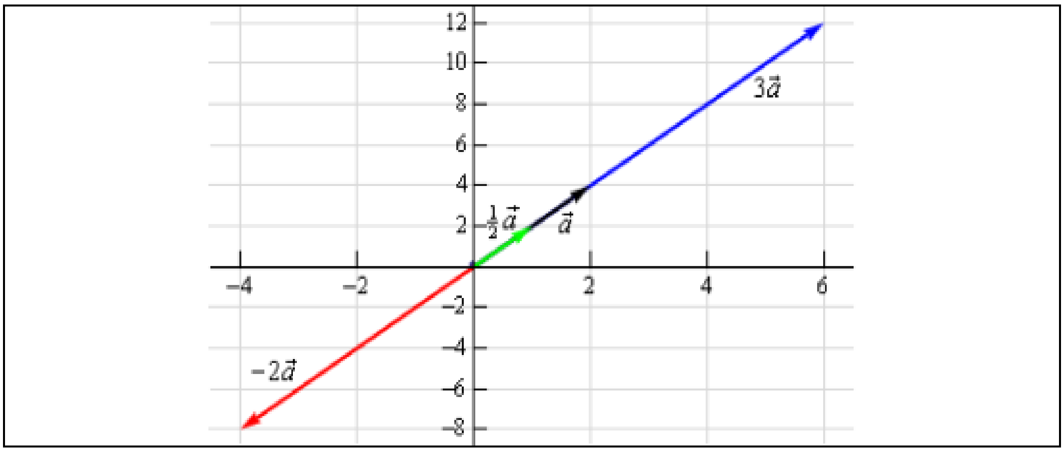
أذا كان $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و c أي ثابت فان:

$$\boxed{c\vec{a} = \langle a_1, ca_2, ca_3 \rangle}$$

لكي نرى التمثيل الهندسي لضرب المتجه بثابت دعنا نأخذ المثال الأتي:

مثال. ليكن $\vec{a} = \langle 2,4 \rangle$ احسب $\frac{1}{2}\vec{a}\ ,\ 3\vec{a},\ -2\vec{a}$. ثم ارسم تلك المتجهات على نفس المحورين.

$$3\vec{a} = \langle 6,12 \rangle\ , \qquad \frac{1}{2}\vec{a} = \langle 1,2 \rangle\ , \quad -2\vec{a} = \langle -4,-8 \rangle$$



من الرسم أعلاه ما يلي:

- أذا كان الثابت $c > 1$ فان طول المتجه سيزيد.
- أذا كان الثابت $c < 1$ فان طول المتجه سيقل.
- أذا كان الثابت $c < 0$ سيتغير اتجاه المتجه.

تعريف. يكون المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيان parallel أذا وجد c بحيث أن:

$$\vec{a} = c\vec{b}$$

مثال. بين فيما أذا كانت مجموعة المتجهات آلاتية متوازية أم لا.

- $\vec{a} = \langle 2,-4,1 \rangle$ و $\vec{b} = \langle -6,12,-3 \rangle$
- $\vec{a} = \langle 4,10 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 2,-9 \rangle$

الحل.a. بما أن $\vec{b} = -3\vec{a}$ فان مجموعة المتجهات الاولى متوازية.

b. أن مجموعة المتجهات الثانية لا تكون متوازية لأنه لا يمكن كتابة أحداها مساوياً إلى ثابت مضروباً في المتجه الأخر.

مثال. جد متجه الوحدة الذي يكون بنفس الاتجاه مع المتجه $\vec{w} = \langle -5,2,1 \rangle$.

الحل. لاحظ أن

$$\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\langle -5,2,1 \rangle = \langle -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}} \rangle$$

من الواضح أن

$$\|\vec{u}\| = \left(\frac{25}{\sqrt{30}} + \frac{4}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{30}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}} = 1.$$

أن المتجه $\vec{u}$ بنفس الاتجاه مع $\vec{w}$ لأنه يساوي ثابت مضروب بـ $\vec{u}$ و هو متجه وحدة.

ملاحظة. بصورة عامة أذا كان لدينا $\vec{w}$ فان $\vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ هو متجه الوحدة الذي يكون بنفس الاتجاه مع $\vec{w}$.

متجهات القاعدة الأساس standard basis vectors

ليكن $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ متجهاً فاننا يمكن أن نكتبه بالصورة:

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0,0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0,0, a_3 \rangle$$

$$= a_1\langle 1,0,0 \rangle + a_2\langle 0,1,0 \rangle +, a_3\langle 0,0,1 \rangle$$

لاحظ أن المتجهات الثلاثة الأخيرة هي متجهات القاعدة الأساس للفضاء الثلاثي الأبعاد. و تكتب

$$\boxed{\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} +, a_3\vec{k}}$$

ملاحظة. يمكن كتابة أي متجه بالصورة أعلاه.

تمرين. أذا كان $\vec{a} = \langle 3,-9,1 \rangle$ و $\vec{w} = -\vec{\imath} + 8\vec{k}$ أحسب $2\vec{a} - 3\vec{w}$.

ألان دعنا نقدم بعض خصائص جبر المتجهات.

خصائص.

ليكن كل من $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ متجهات و ليكن $a\ ,b$ أعداد فان:

- $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
- $\vec{v}+0=\vec{v}$
- $a(\vec{v}+\vec{w})=a\vec{v}+a\vec{w}$
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
- $1\vec{v}=\vec{v}$
- $(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$

الضرب العددي أو النقطي أو الداخلي scalar or dot or inner product

تعريف. ليكن كل من $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ و $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ متجه. فان الضرب العددي أو النقطي أو الداخلي لهما هو:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

مثال. احسب الضرب العددي لكل مما يأتي:

- $\vec{w}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ و $\vec{v}=5\vec{\imath}-8\vec{\jmath}$
- $\vec{b}=\langle 2,3,1\rangle$ و $\vec{a}=\langle 0,3,-7\rangle$

الحل.

- $\vec{v}.\ \ \vec{w}=5-16=-11$
- $\vec{a}.\vec{b}=0+9-7=2$

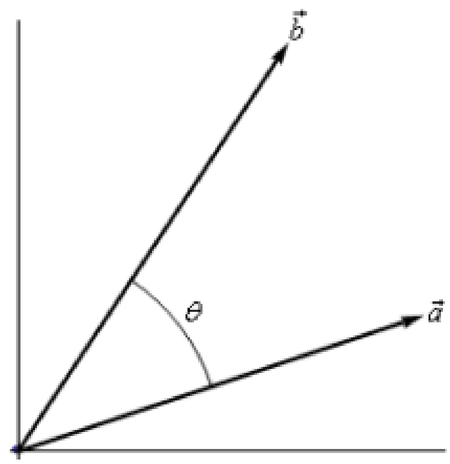
ألان دعنا نقدم بعض خصائص الضرب العددي.

خصائص.

ليكن كل من $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ متجهات فان:

- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\ \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{v}.\vec{w}=\vec{w}.\vec{v}$
- $\vec{v}.\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$
- $(c\vec{v}).\vec{w}=\vec{v}.(c\vec{w})=c(\vec{v}.\vec{w})$
- أذا كان $\vec{v}.\vec{v}=0$ فان $\vec{v}=0$.

ملاحظة. يوجد تمثيل هندسي للضرب العددي. لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بحيث أن $0 \leq \theta \leq \pi$ كما في الرسم أدناه:



ملاحظة.

- $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|cos\theta$
- أن صيغة الضرب النقطي في الصيغة أعلاه لا تستخدم لاستخراج الضرب النقطي لمتجهين و أنما تستخدم لاستخراج الزاوية المحصورة بين المتجهين.

مثال. جد الزاوية بين المتجهين $\vec{a} = \langle 3,-4,-1\rangle$ و $\vec{b} = \langle 0,5,2\rangle$.

الحل. نحتاج إلى الضرب النفطي لاستخراج الزاوية بين المتجهين

$$\vec{a}.\vec{b} = -22,\ \ \|\vec{a}\| = \sqrt{26},\ \|\vec{b}\| = \sqrt{29}$$

لدينا

$$cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{-22}{\sqrt{26}\sqrt{29}} = -0.8011927$$

و بالتالي ستكون

$$\theta = cos^{-1}(-0.8011927) = 2.5\ \ \text{radians.}$$

ملاحظة. يعطينا الضرب النقطي طريقة لمعرفة فيما أذا كان متجهين متعامدين perpendicular أم لا. و سنستخدم المصطلح orthogonal بدلاً من

perpendicular. كما سيعطينا الضرب النقطي أيضا طريقة لمعرفة فيما أذا كان متجهين متوازيين parallel أم لا.
ألان أذا كان المتجهان متعامدين نحن نعلم أن الزاوية بينهما تساوي $90°$ و بالتالي سنحصل من الملاحظة اعلاه ان $\vec{a}.\vec{b} = 0$ و نحن نعلم ايضاً اذا كان متجهان متوازيين فان الزاوية بينهما أما تساوي صفر أو يكونان بنفس الاتجاه أو تكون الزاوية بينهما تساوي $180°$. أي يكونان باتجاهين متعاكسين و باستخدام الملاحظة اعلاه مرة اخرى سنحصل على:

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \quad \text{عندما} \quad \theta = 0$$
$$\vec{a}.\vec{b} = -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \quad \text{عندما} \quad \theta = 180°$$

مثال. بين فيما أذا كانت المتجهات الآتية متوازية أم متعامدة أم لا متعامدة و لا متوازية.

- $\vec{a} = \langle 6, -2, -1 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 2,5,2 \rangle$
- $\vec{u} = \langle 2, -1 \rangle$ و $\vec{v} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \rangle$

الحل.

- في البداية دعنا نرى فيما أذا كان المتجهان متعامدين أم لا

$$\vec{a}.\vec{b} = 12 - 10 - 2 = 0$$

و هذا يؤدي إلى أن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدان.

كذلك دعنا نلاحظ الضرب النقطي للمتجهين

$$\vec{u}.\vec{v} = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

سنحصل من هذا أن المتجهين غير متعامدين. و ألان دعنا نستخرج طول كل منهما

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{5}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

و ألان لاحظ أن

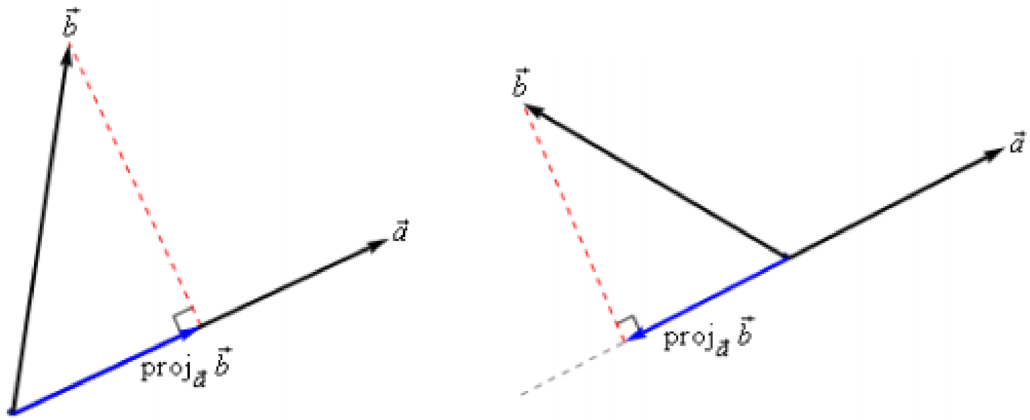
$$\vec{u}.\vec{v} = -\frac{5}{4} = -\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right) = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

و بالتالي سيكون المتجهان متوازيين.

أن تطبيقات الضرب العددي هي المساقط projections.

المساقط projections

ليكن كل من $\vec{b}$ و $\vec{a}$ متجهين. سنشرح معنى مسقط $\vec{b}$ على $\vec{a}$ الذي سنرمز له بالرمز $proj_{\vec{a}}\vec{b}$.



توجد صيغة لإيجاد مسقط $\vec{b}$ على $\vec{a}$

$$\boxed{proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}}$$

اما مسقط $\vec{a}$ على $\vec{b}$

$$\boxed{proj_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}}$$

مثال. جد مسقط $\vec{b} = \langle 2,1,-1\rangle$ على و $\vec{a} = \langle 1,0,-2\rangle$.

الحل. لاحظ أن

$$\vec{a}.\vec{b} = 4 \ , \ \ \|\vec{a}\|^2 = 5$$

و بالتالي سيكون

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$$

$$= \tfrac{4}{5}\langle 1,0,-2\rangle = \langle \tfrac{4}{5}, 0, -\tfrac{8}{5}\rangle.$$

ألان دعنا نستبدل المتجه $\vec{a}$ بالمتجه $\vec{b}$. ماذا سنلاحظ ؟!

$$\vec{a}.\vec{b} = 4 \;,\;\; \|\vec{b}\|^2 = 6$$

و بالتالي سيكون

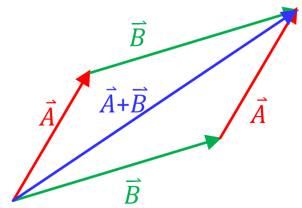
$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$$

$$= \frac{4}{6}\langle 2,1,-1\rangle = \langle \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\rangle.$$

لاحظ أن كلا المسقطين مختلفين.

تمارين محلولة.

ملاحظة . دعنا نتذكر في البداية التمثيل الهندسي لحاصل جمع المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{A}$.

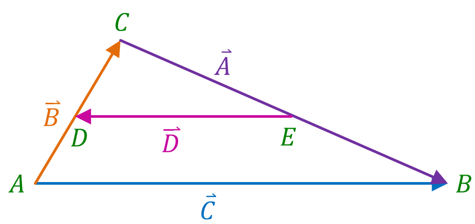


1.برهن أن الخط الذي يصل بين نصفي ضلعين في مثلث يوازي ضلعه الثالث و يساوي نصفه بالقياس.

البرهان. من الشكل في الأسفل لدينا $\vec{B}+\vec{A}=\vec{C}$. ان المتجه $\vec{D}$ يصل بين منتصفي الضلعين $\vec{B}$ و $\vec{A}$. فان

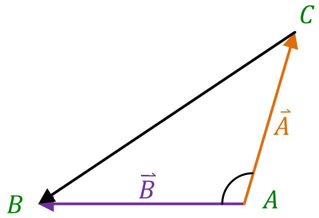
$$\vec{D} = \frac{1}{2}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{(A+B)} = \frac{1}{2}\vec{C}.$$

و بالتالي سيكون $\vec{D}$ موازي الى $\vec{C}$ و يساوي نصفه بالقياس.



2. جد الزاوية $BAC \prec = \propto$ للمثلث ABC الذي رؤوسه

$$A = (1,0,1)\ ,\ \ B = (2,-1,1)\ ,\ \ C = (-2,1,0)$$



الحل.

$$\vec{A} = AC = \langle -3,1,-1 \rangle$$

$$\vec{B} = AB = \langle 1,-1,0 \rangle$$

لدينا

$$cos \propto = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{(-3-1)}{\sqrt{22}} = -0.85280.$$

و بالتالي ستكون $\propto = 148^\circ.5\acute{1}$.