

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{2\pi r dr \sigma}{4\pi \epsilon_0 L^2} \cos \theta$$

$$L^2 = b^2 + r^2, \quad \cos \theta = \frac{b}{L}$$

ولكن من الشكل لدينا:

$$\therefore dE_x = \frac{2r dr \sigma b}{4\epsilon_0 (b^2 + r^2)^{3/2}}$$

وحتى يُحصل على المجال الناتج عن القرص كاملاً يكامل هذا المقدار بالنسبة لـ r التي حدها 0 و a أما b فهي ثابتة.

$$\therefore E = \int_0^a \frac{2r dr \sigma b}{4\epsilon_0 (b^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{b\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^a \frac{2r dr}{(b^2 + r^2)^{3/2}}$$

ويمكن إجراء هذا التكامل بإجراء تحويل المتغير بأن نعتبر أن: $du = 2r dr$  $u = b^2 + r^2$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{b\sigma}{2\epsilon_0 (b^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{b\sigma}{2\epsilon_0} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [1 - \cos \theta] \dots \dots \dots \text{أ ٤٥}$$

وعندما يصبح القرص لانهايتاً تكون عندها ($\theta = 90^\circ$) وينعدم بذلك الحد الثاني وتصبح المعادلة كالتالي:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \dots \dots \dots \text{ب ٤٥}$$

وأخيراً إذا كان الجسم المشحون له حجم قدره V وكانت ρ كثافته الحجمية (شحنة وحدة الحجم) فإنه يمكن الحصول على معادلة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد r من عنصر الحجم dV من المعادلتين (٣٦) و(٣٩) أي أن:

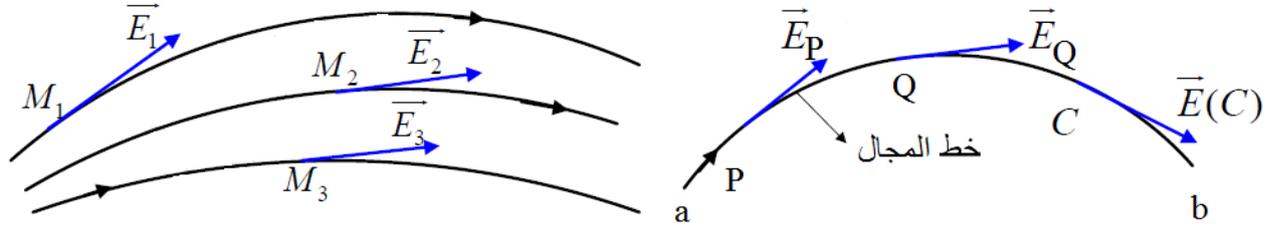
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^3} \vec{r} \dots \dots \dots \text{٤٦}$$

خطوط القوى الكهربائية Lines of Forces

يرجع أصل فكرة خطوط القوى إلى ميشيل فراداي Michael Faraday (١٧٩١ - ١٨٦٧م) وهي عبارة عن خطوط وهمية تستخدم لوصف المجال الكهربائي مقداراً واتجهاً. ويبدأ خط القوى من الشحنة الموجبة وينتهي بالسالبة. وترسم هذه الخطوط عادة بحيث تتوفر فيها شرطان:

أ - أن يكون المماس لخط القوة الكهربائي عند أي نقطة ممثلاً لاتجاه المجال عند هذه النقطة.
ويوضح الشكل المجال E_p للنقطة p و E_Q للنقطة Q الواقعتين على المسار ab .

تعريف: خطوط المجال الكهربائي هي خطوط موجهة و مماسية في كل نقطة لشعاع المجال \vec{E} . و هي خطوط تمر من الشحنة q . (الشكل 16.1)

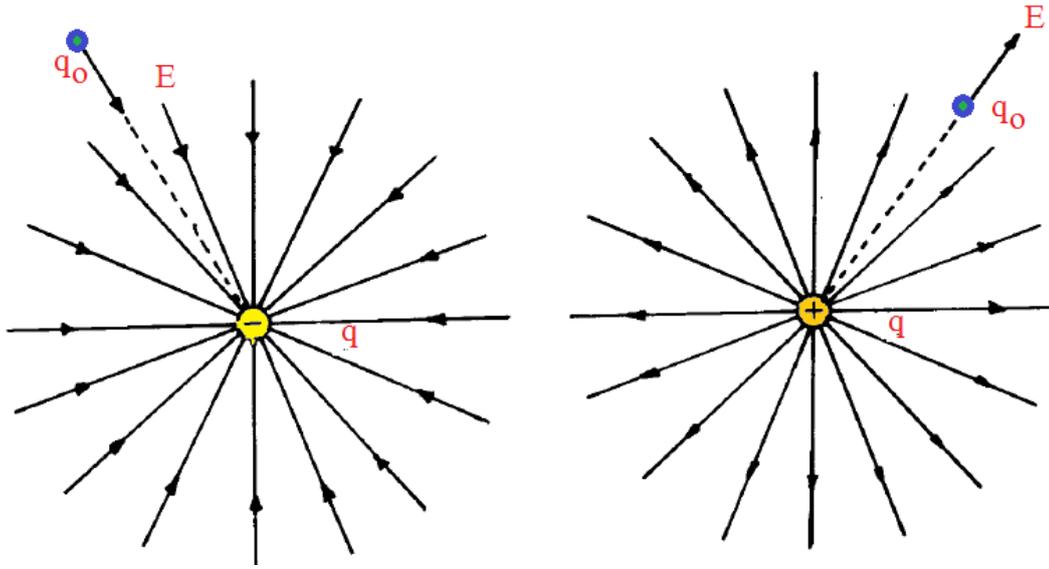


شكل يمثل خطوط المجال الكهربائي

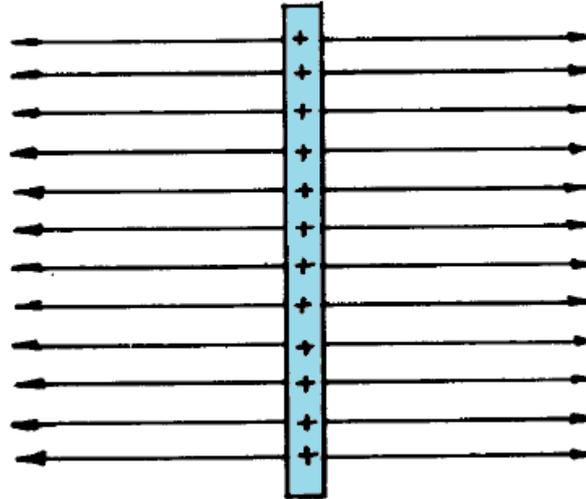
في حالة شحنة نقطية ، فإن خطوط المجال هي نصف مستقيمتان تتقاطع في النقطة حيث تتمركز الشحنة. في حالة شحنة موجبة ، المجال يكون موجها نحو الخارج و نقول أنه مغادر و هو الأمر نفسه بالنسبة لخطوط المجال . و العكس صحيح بالنسبة للشحنة السالبة و نقول أن المجال يصل أو يرد.

ب - أن يكون عدد خطوط القوى التي تقطع وحدة المساحة المحيطة بنقطة ما ، وتكون عمودية عليها ، مساويا عدديا شدة المجال عند هذه النقطة . وخط القوة الكهربائي يمثل مسار وحدة الشحنة الموجبة داخل المجال الكهربائي .

يمثل الشكلان (أ١١ - ١) و (ب١١ - ١) بعض خطوط القوى حول شحنة موجبة وكذلك حول شحنة سالبة . وكما هو واضح تختلف قيمة المجال باختلاف بعد موجبة وكذلك حول شحنة سالبة . وكما هو واضح تختلف قيمة المجال باختلاف بعد المسافة عن شحنة الاختبار q_0 ولكن للمجال قيمة واحدة عند أي نقطة حول q تقع على المسافة المعطاة نفسها . كما يبين الشكل (١١ج - ١) خطوط القوى لصفحة طويلة منتظمة الشكل مشحونة بشحنة موجبة وفي هذه الحالة تكون الخطوط متعامدة مع مستوى الصفحة وموازي بعضها بعضا وتكون قيم E واحدة لكل النقاط القريبة من الصفحة .



شكل يمثل خطوط القوى ناتجة عن أ- شحنة موجبة ب- شحنة سالبة



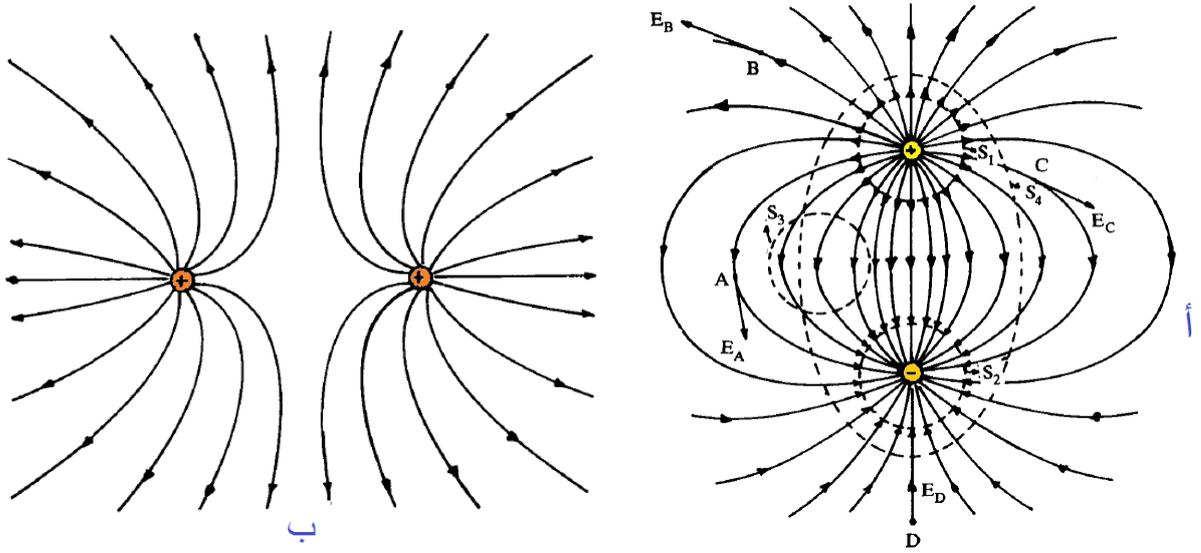
شكل يمثل خطوط القوى ناتجة عن موصل مستقيم مشحون بشحنة موجبة

وَيُمَثِّلُ شَكْلُ (١٢ - ١) خطوط القوى في حالة شحنتين إحداهما سالبة والأخرى موجبة .

وفي هذه الحالة يمثل المجال عند أي نقطة محصلة المجالين الناشئين عن الشحنتين واتجاهه يمثل المماس لخط القوى الكهربائي . والشكل يوضح أيضا المجال المحصل عند النقاط D و C و B و A كما يمثل شكل (١٢ ب - ١) خطوط القوى حول شحنتين موجبتين .

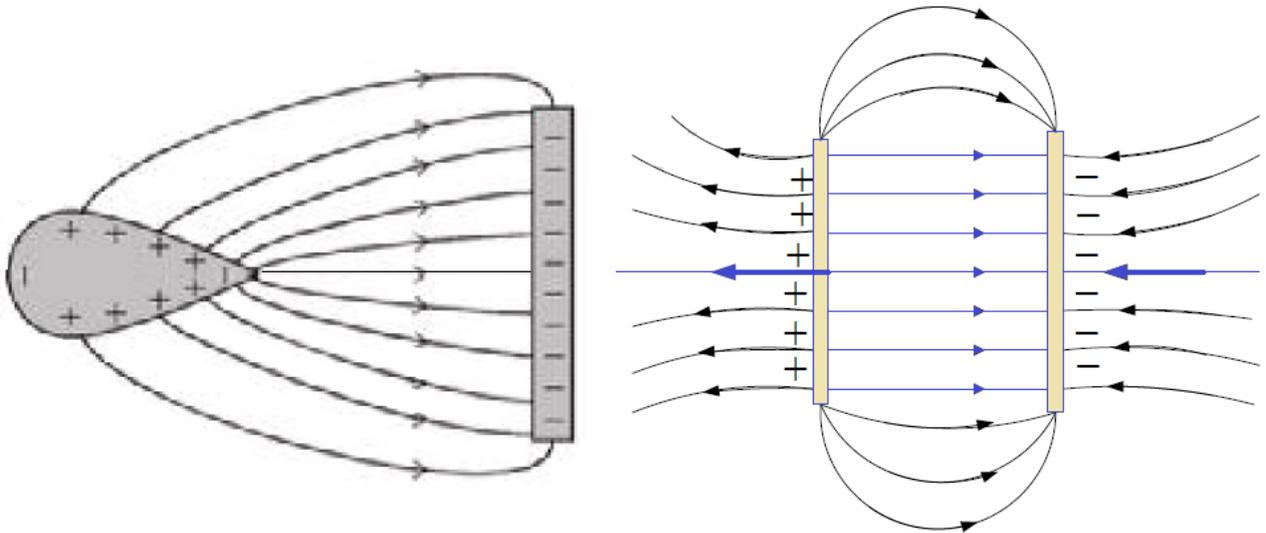
وإذا حُدِدَتْ بطريقة ما خطوط القوى فإنه يمكن استخدام هذه الخطوط للدلالة على شدة المجال فضلا عن اتجاهه . فإذا كانت E شدة المجال الكهربائي - فإن عدد خطوط القوى في وحدة المساحة تكون متساوية على جميع نقط السطح العمودي على هذا المجال .

وإذا حُدِدَتْ بطريقة ما خطوط القوى فإنه يمكن استخدام هذه الخطوط للدلالة على شدة المجال فضلا عن اتجاهه . فإذا كانت E شدة المجال الكهربائي - فإن عدد خطوط القوى في وحدة المساحة تكون متساوية على جميع نقط السطح العمودي على هذا المجال .



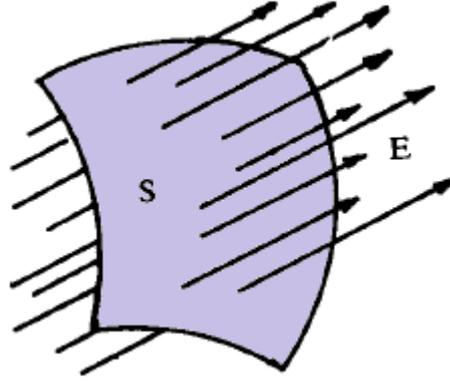
الشكل * خطوط القوى لشحنتين إحداهما سالبة والأخرى موجبة

كما يمثل الشكل خطوط المجال حول شحنتين نقطيتين متجاورتين ومتساويتين وتحملان نفس الشحنة. و يمثل الشكل خطوط الحقل المنتظم (صفيحتان متوازيتان متقاربتان ومشحونتان الواحدة إيجابيا و الأخرى سلبا، و بشحنتين متساويتين بالقيمة المطلقة). باستثناء حافتي المكثفة، فإن خطوط المجال داخل المكثفة متوازية، متعامدة مع كل من الصفيحتين، ومتساوية الكثافة. فإذا كانت مساحة السطح S ، شكل (1-13)، فإن العدد الكلي لخطوط القوى المارة خلال هذا السطح هو:



شكل يمثل خطوط المجال الكهربائي المنتظم و المجال الكهربائي لموصل حاد

حساب المجال الكهربائي بمعرفة خطوط القوى N المارة من سطح مساحته S



فإذا كانت مساحة السطح S ، شكل (١٣) ، فإن العدد الكلي لخطوط القوى المارة خلال هذا السطح هو:

$$N = ES$$

٤٧أ

وبذلك يمكن القول بأن: شدة المجال عند نقطة ما تمثل عدد خطوط القوى الكهربائية التي تقطع وحدة المساحة عموديا عند هذه النقطة.

وطبقا لهذا التعريف والاستعانة بشكل أدناه فإن عدد الخطوط العمودية dN التي تقطع المساحة dS من سطح غلاف كروي نصف قطره r وتقع في مركزه شحنة موجبة q تعطى بالمعادلة:

$$dN = E \cdot dS$$

*

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

حيث E شدة المجال عند أي نقطة على سطح الكرة ويعطى بالمعادلة:

$$\therefore dN = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS$$

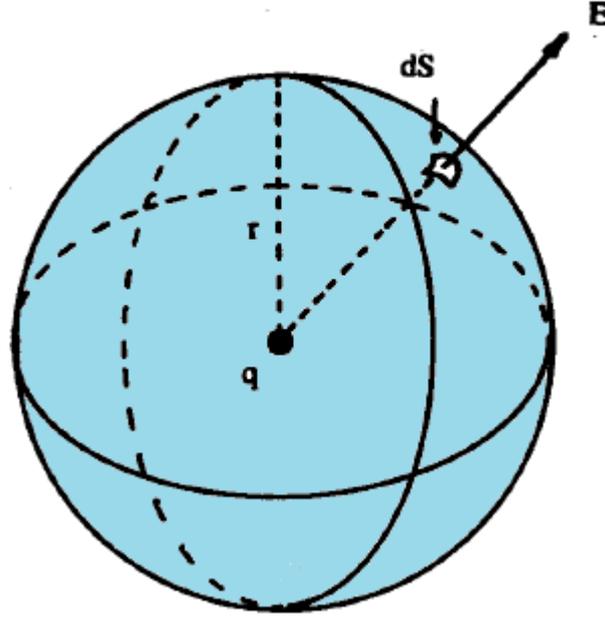
*

∴ مجموع خطوط القوى N التي تقطع سطح الكرة كلها في اتجاه عمودي هي:

$$\therefore N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (4\pi r^2)$$

$$\therefore N = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

٤٧ب



شكل : عدد خطوط القوى dN التي تقطع المساحة dS من سطح غلاف كروي نصف قطره r وتقع الشحنة q في مركزه .

(ومنها يتجه المجال عند أي مكان مبتعدا عن الشحنة في اتجاه نصف القطر أي عموديا على السطح الكروي).
وواضح أن عدد خطوط القوى لا تتوقف على نصف قطر الكرة مما يدل على تساوي عدد الخطوط المارة بجميع الكرات التي تقع في مركزها النقطة المشحونة .

وتعرف المعادلة (٤٧ب) بنظرية جاوس (Gauss's Law) كما يعرف N بالفيض (التدفق) الكلي في اتجاه عمودي (total normal flux). والتدفق «في صورته العامة» لأي مجال كهربائي يقاس بعدد خطوط القوى التي تمر خلال سطح افتراضي (hypothetical surface) قد يكون مغلقا أو مفتوحا ويرمز له بالرمز Φ وهذا التدفق يكون موجبا إذا كانت خطوط القوى خارجة من السطح المقفل وسالبا إذا كانت خطوط القوى آتية إليه .

يمثل الشكل * خطوط القوى لشحنتين إحداهما سالبة والأخرى موجبة . وعندما تقطع الأسطح الافتراضية المحددة بالمنحنيات S_1, S_2, S_3, S_4 المغلقة فيكون التدفق موجبا بالنسبة للسطح S_1 وسالبا بالنسبة للسطح S_2 .

وتتضح نظرية التدفق فيما لو وضع سطح غير منتظم الشكل في مجال كهربائي E بحيث تكون خطوط القوى غير عمودية على كل أجزائه . وفي هذه الحالة يقسم السطح إلى أسطح صغيرة مساحتها ΔS واتجاهها يحدد بمتجه الوحدة العمودي عليه ويعطى التدفق لكل سطح صغير بالعلاقة التالية:

$$\Delta \Phi = E \Delta S \cos \theta \quad \text{.....} \quad \text{٤٨ أ}$$

حيث θ هي الزاوية بين العمودي على السطح وبين اتجاه المجال E . ولما كانت $E \cos \theta$ هي المركبة العمودية للمجال (أي المركبة في اتجاه العمودي على السطح) فإن التدفق الكلي للسطح يساوي مجموع التدفق لكل الأسطح الصغيرة وبصورة تقريبية فإن:

$$\Phi = \sum E \Delta S \cos \theta \quad \text{.....} \quad \text{٤٨ ب}$$

والتعريف الدقيق للتدفق يمكن إيجاده في الصورة التفاضلية للمعادلة (٤٨ ب) بحيث يستبدل المجموع \sum بالتكامل على السطح كله . $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ أو $\Phi = \oint E dS \cos \theta$ ٤٨ ج

هذا التكامل السطحي (surface integral) يحدد تقسيم السطح إلى عناصر متناهية في الصغر (infinitesimal elements) " dS " بحيث تعطى قيمة التدفق للعنصر بالعلاقة $E \cdot dS$. وتشير الدائرة O المرسومة على علاقة التكامل أن السطح مغلق.

حركة الجسيمات المشحونة في مجال كهربائي منتظم :

عندما يتم وضع جسم يحمل شحنة مقدارها q وكتلة m في مجال كهربائي E . فإن القوة الكهربائية المسلطة على الشحنة هي qE وفقا لمعادلة 23.8. إذا كانت هذه هي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم ، ويجب أن تكون هي القوة الوحيدة الصافية المسببة الى تعجيل الجسيمة وفقا لقانون نيوتن الثاني. فإنه:

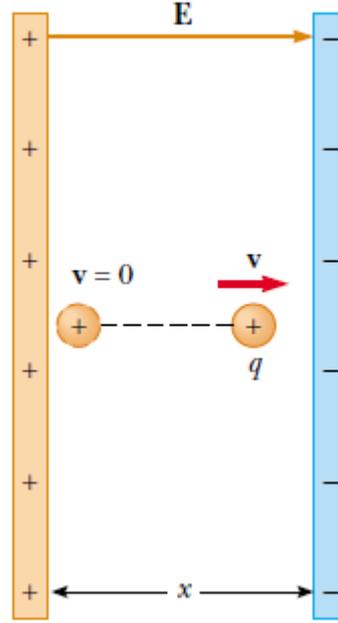
$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

وعليه يمكن ان نكتب تعجيل الجسم بالصورة التالية

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m}$$

إذا كان E (ثابت السعة والاتجاه) فعلية يكون التعجيل ثابت . فإذا كان الجسم يحمل شحنة موجبه فإن التعجيل سيكون في اتجاه المجال الكهربائي أما اذا كان الجسم يحمل شحنة سالبه فإن التعجيل في عكس اتجاه المجال الكهربائي .

مثال شحنة نقطية موجبة تحمل شحنة مقدارها q وكتلة قدرها m منطلقة في مجال كهربائي منتظم مقدارها E باتجاه على طول المحور x -axis كما موضحة في الشكل أدناه . أوصف حركة الجسم .



الحل : يعتبر هنا التعجيل ثابت ويعطى بالعلاقة qE/m . لذلك تكون الحركة بسيطة على طول المحور x-axis لذلك يمكن ان نطبق قوانين الحركة ببعد واحد وكالاتي:

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_f = v_i + a t$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$$

الجسم بدأ الحركة من السكون فعليه يكون موقع الشحنة عند $x_i = 0$ وأن سرعتها الابتدائية $v_i = 0$. أن موقع الجسم يكون دالة الى الزمن أي :

$$x_f = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{qE}{2m} t^2$$

ان سرعة الجسم تعطى بالعلاقة التالية :

$$v_f = a t = \frac{qE}{m} t$$

وعليه :

$$v_f^2 = 2 a x_f = \left(\frac{2qE}{m} \right) x_f$$

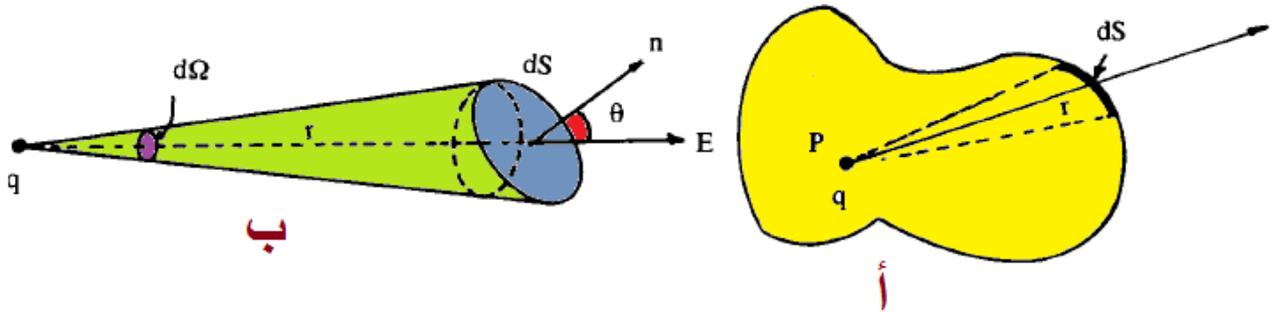
ويمكننا ان نجد الطاقة الحركية للشحنة بعد ان يقطع الجسم مسافة مقدارها $\Delta x = x_f - x_i$:

$$K = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2qE}{m} \right) \Delta x = qE \Delta x$$

قانون كاوس Gauss's Law

أن المعادلة (٤٨ جـ) تمثل مجموع خطوط القوى العمودية والتي تمر بكل سطح كروي تقع الشحنة q في مركزه. ويعمم جاوس هذه النتيجة فهو يثبت أنه إذا تعرض أي سطح مقفل لمجال كهربى فإن عدد خطوط القوى التي تنفذ منه إلى الخارج تساوي $\frac{1}{\epsilon_0}$ مضروبا في المجموع الجبري للشحنات المحصورة داخل هذا السطح بصرف النظر عن كيفية توزيع الشحنات داخل السطح. أو بقول آخر «يتناسب الفيض الكهربى على سطح مغلق (*closed surface*) مع المجموع الجبري للشحنات داخل هذا السطح».

ولإثبات هذه النظرية في الحالة العامة، يفترض وجود شحنة مقدارها q عند النقطة P . كما في شكل ، داخل سطح مغلق غير منتظم الشكل. في هذه الحالة تكون شدة المجال مختلفة من نقطة إلى نقطة أخرى على السطح، وإذا لم يكن السطح في جميع نقطه عموديا على المجال فإنه يمكن حساب عدد خطوط القوى المارة بالسطح بالطريقة التالية:



أ - سطح مغلق غير منتظم الشكل توجد بداخله شحنة قدرها q
 ب - جزء صغير من السطح المغلق يمكننا من حساب الفيض الكهربى العمودي عليه ثم يعمم على السطح المغلق كاملا «قانون جاوس».

يفرض أن سطحاً صغيراً dS يمثل جزءاً من السطح الكلي المحيط بالنقطة q حيث يبعد مسافة r عن q كما في شكل . ولتكن n هي متجه الوحدة العمودي على dS و E شدة المجال وحسب المعادلة (٤٨ جـ) يكون الفيض العمودي خلال المساحة dS هو:

$$d\Phi = E dS \cos \theta \dots\dots\dots (٤٩)$$

حيث θ هي الزاوية بين العمود n على السطح dS واتجاه المجال E وبهذا فإن $E \cos \theta$ هي المركبة العمودية للمجال E وحيث إن :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \dots\dots\dots *$$

وبالتعويض في المعادلة (٤٩) نحصل على :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cos \theta}{r^2} dS$$

ولكن من المعروف هندسيا أن الزاوية المجسمة $d\Omega$ (solid angle) المقابلة للسطح dS تعطى بالمعادلة ،

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

$$\therefore d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cos \theta}{r^2} \frac{r^2 d\Omega}{\cos \theta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

ويكون الفيض الكلي Φ العمودي خلال السطح المغلق والذي يسمى بسطح جاوس (Gaussian surface) (أي عدد خطوط القوى التي تخترق عموديا السطح المغلق كله) محددًا بالمعادلة :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \dots\dots\dots (١٥٠)$$

حيث إن $\oint d\Omega = 4\pi$ هو قيمة الزاوية المجسمة التي يصنعها السطح المغلق كله حول P وإذا كان هناك أكثر من شحنة داخل السطح المغلق فإنه بتطبيق المعادلة (١٥٠) على كل شحنة يمكن الحصول على :

$$\Phi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega_1 + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega_2 + \dots\dots\dots$$

$$\therefore \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 + \dots) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_n q_n \dots\dots\dots (١٥١)$$

ومن المعادلتين (٤٩) و(٥٠) نجد أن :

$$\Phi = \oint E \cos \theta dS = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_n q_n \dots\dots\dots (٥١)$$

$$\Phi = \oint E \cos \theta dS = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum_n q_n$$

وهذه هي معادلة جاوس في صورتها العامة وفي نظامي الوحدات العالمي والجاوسي على التوالي وإذا فرض أن E_n هي المركبة العمودية لشدة المجال على السطح dS بحيث يكون

اتجاه العمود n إلى الخارج . فإن المعادلتين (٥١) تصبحان كالتالي :

$$\Phi = \oint E_n \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_n q_n$$

$$\Phi = \oint E_n \cdot dS = 4\pi \sum_n q_n$$

(٥١ب)

ويمكن استبدال الـ $\sum q_n$ بإحدى التكاملات الخاصة $\int \rho dV$ أو $\int \sigma dS$ أو $\int \lambda dl$ المختلفة باختلاف نوع توزيع الشحنة الحجمية أو السطحية أو الطولية،

ملاحظات

١ - إذا كان السطح ملتويا (convoluted surface) كما في شكل (١٦أ) وأخذ في الاعتبار الأسطح S_1 و S_2 و S_3 المقابلة للزاوية المجسمة $d\Omega$ فإنه من الواضح أن توزيع الفيض لهذه الأسطح هو:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

وإشارة ناقص هنا تدل على أن العمودي على السطح S_1 يعاكس العمودي على السطح S_2 .

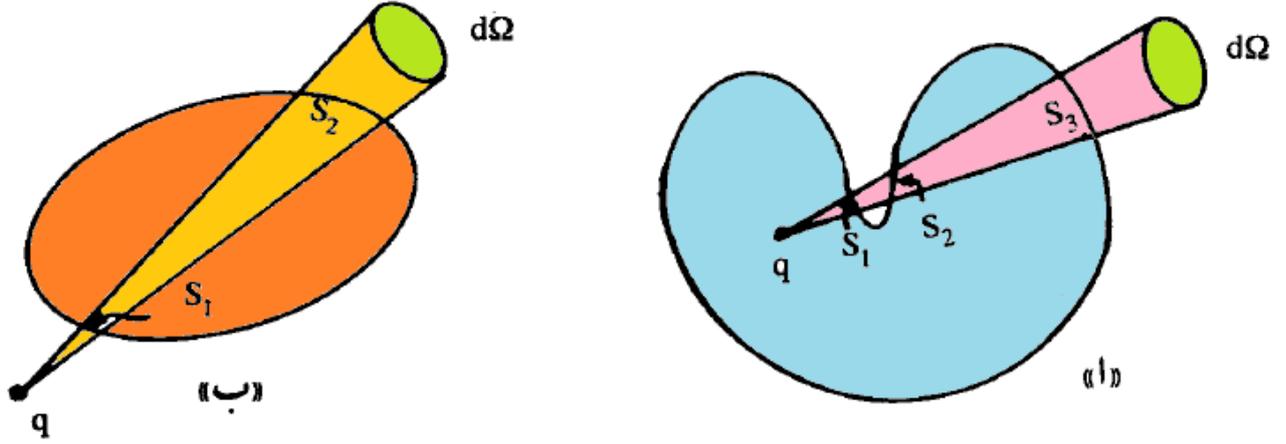
$$\therefore \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وهي المعادلة (٥٠) نفسها التي تم الحصول عليها بالنسبة للسطح غير الملتوي .

٢ - إذا كانت الشحنة q واقعة خارج سطح مغلق كما في شكل (١٦ب - ١) فإن توزيع الفيض (the flux) بالنسبة للأسطح المقابلة للزاوية المجسمة $d\Omega$ هو:

$$d\Phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = 0$$

وهذه النتيجة تعني أن الفيض الكلي للسطح المغلق في وجود شحنة خارجة عنه يساوي صفر مهما كان شكله الهندسي .



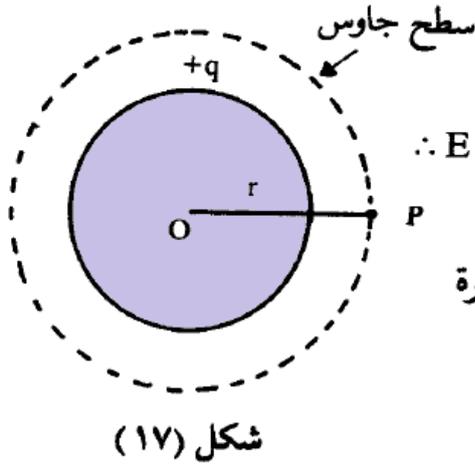
- ١- سطح مقفل متعرج بداخله شحنة قدرها q ثم تطبيق قانون جاوس لحساب الفيض الكهربائي من خلال الأسطح S_1 ، S_2 ، S_3 .
- ب - سطح آخر مقفل بينما تقع الشحنة خارجه ومدى تطبيق قانون جاوس لحساب الفيض الكهربائي من خلال الأسطح S_1 ، S_2 .
- ٣- تتوقف سهولة حساب شدة المجال باستخدام قانون جاوس على حسن اختيار السطح المغلق المناسب لتوزيع الشحنات وشكل المجال. ويراعى في اختيار سطح جاوس ما يأتي:
 - أ - أن يمر السطح المغلق بالنقطة المراد حساب شدة المجال عندها.
 - ب - أن يكون السطح المغلق متلائماً مع توزيع الشحنات وأن يكون منتظماً على قدر الإمكان.
 - ج - أن تسقط خطوط القوة عمودية على السطح أو موازية له أو تصنع معه زاوية ثابتة معلومة حتى يسهل حساب الفيض الكهربائي.
 - د - أن تكون شدة المجال ثابتة على أجزاء السطح المختلفة.

تطبيقات على قانون كاوس

١- شدة المجال حول كرة مشحونة:

يمثل الشكل (١٧) كرة تحمل شحنة موجبة قدرها q . فلحساب شدة المجال عند النقطة P خارج الكرة. يُفرض وجود سطح كاوسي نصف قطره r ويمر بالنقطة P . وحيث إن خطوط القوى تنبعث من سطح الكرة المشحونة في اتجاه عمودي على سطحها أي تتلاقى عند المركز. كما أنها تقطع سطح كاوسي في الاتجاه العمودي. فبتطبيق المعادلة (٥١) يكون:

$$E \int_0^{4\pi r^2} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$



ولأن: $\cos \theta = 1$

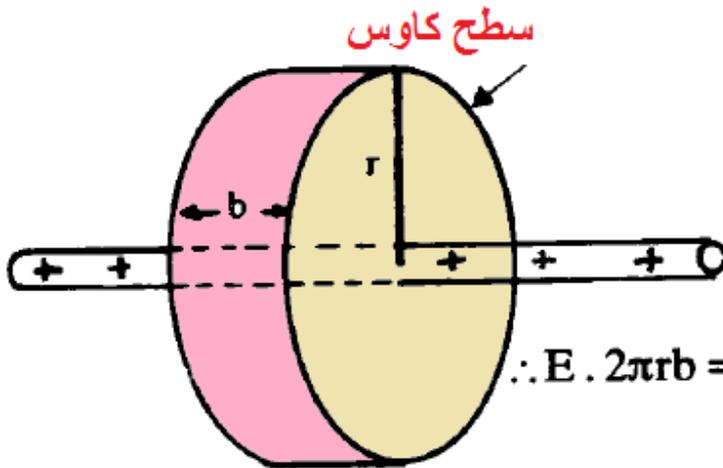
$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{أو} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{1}_r$$

٥٢

أي أن قيمة شدة المجال الكهربائي عند النقطة P خارج كرة مشحونة هي نفسها كما لو كانت الشحنة عند المركز.

2- المجال الناشئ عن سلك طويل مشحون

لنتخيل سطحاً كائوس على هيئة غلاف أسطواني طوله b ونصف قطره r ومتحد المحور مع السلك كما في شكل فإذا كانت λ شحنة وحدة الطول فإن الطول b من الأسطوانة المذكورة يحمل شحنة قدرها λb . وحيث إن خطوط القوى عمودية على سطح كائوس وتطبيق نظرية كائوس [المعادلة (٥١)] يمكن الحصول على:



$$E \int_0^{2\pi r b} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda b$$

$$\therefore E \cdot 2\pi r b = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda b \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

وهي تمثل المعادلة (٤٢) نفسها.

3- المجال حول أسطوانة Field around cylinder

يمثل شكل أسطوانة طولية نصف قطرها a نفرض أن الكثافة السطحية لشحنتها منتظمة ومقدارها σ ، ومعنى هذا أن الطول b يحمل شحنة قدرها: