استخراج جذور العدد المعقد حسب نظرية دي موفر

سوف نرى كيف يمكننا ان نستخدم التعميم لزاوية العدد المعقد في ايجاد جذور العدد المعقد باستخدام نظرية دي موفر:

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^3 = 8$.

الحل:

$$8 = 8(\cos(0) + isin(0))$$

نتوقع ثلاثة جذور لـ z تحقق المعادلة التكعيبية. هكذا اعادة ترتيب، الان نكتب الجانب الايمن كعدد معقد بالصيغة القطبية:

$$z^3 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^3 = 8(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)) \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\pm, \dots \dots$$

الان نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

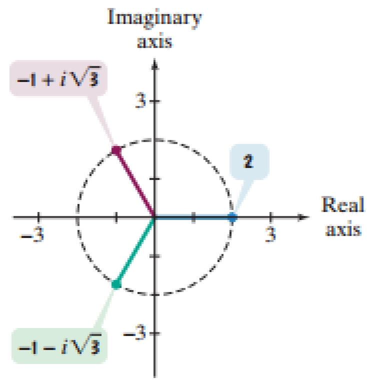
$$z = \sqrt[3]{8}(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي $0,1,2$. اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر الى احد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \qquad z_0 = 2(\cos(0) + i\sin(0)) = 2$$

$$k = 1 \qquad z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \qquad z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}$$



اذن هنالك ثلاثة قيم (معقدة) لـ $8^{\frac{1}{3}}$. لو عوضنا الجذور في $z^3 = 8$ لحصلنا على ان الطرف الايسر يساوي الطرف الايمن :

$$2^3 = 8 \quad \text{و} \quad \left(-1+i\sqrt{3}\right)^3 = 8 \quad \text{و} \quad \left(-1-i\sqrt{3}\right)^3 = 8$$

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^3 = i$.

الحل :

$$z^3 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^3 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\pm, \dots\dots$$

الان نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

$$z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي 0,1,2 . اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر لاحد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \qquad z_0 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k = 1 \qquad z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$k = 2 \qquad z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -i$$

مثال: جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر $z^2 = 1 + i$.

الحل : المطلوب ايجاد جميع الجذور $z = (1+i)^{\frac{1}{2}}$.

نقوم اولاً بإيجاد قيمة r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2} = \sqrt{2}$$

ومن ثم باستخدام المعادلة التالية نستخرج θ:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1\infty) = \frac{\pi}{4}$$

$$z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

لو استخدمنا تعميم زاوية العدد المعقد من خلال اضافة مضروب صحيح اعتباطي من 2π. سوف نحصل على التعبير المعدل التالي:

$$z^2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) \quad k = 0, \pm 1,$$

الان نأخذ الجذر التكعيبي لكلا الطرفين

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام نظرية دي موفر نحصل

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 8k\pi}{8}\right)\right)$$

الاجراء الطبيعي يكون بأخذ ثلاثة قيم لـ k هي 0,1,2 . اي قيمة اخرى لـ k ستقود الى جذر يكون مكرر الى احد الجذور الثلاثة لقيم k اعلاه:

$$k = 0 \qquad z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 1.099 + 0.455i$$

$$k = 1 \qquad z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) = -1.099 - 0.455i$$

تمارين

جد جذور العدد العقدي باستخدام نظري دي موفر **لكل مما يأتي:**

١- $z^2 = \sqrt{3} + 3i$.

٢- $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

٣- $z^4 = -4$.

٤- $z^3 = -8i$.