الفصل الثالث

التفاضل ومعادلات كوشي - ريمان التفاضلية
The Derivative and Cauchy-Riemann differential Equation

التفاضل

تعريف :- اذا كانت $f(Z)$ داله وحيده القيمه في منطقه ما في المستوى المعقد Z فأنه يمكن تعريف مشتقه الداله $f(Z)$ بأنها

$$f'(Z) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z+\Delta Z) - f(Z)}{\Delta Z}$$

بحيث تكون هذه النهايه موجوده وغير معتمده على الطريقه التي بها $\Delta Z \to 0$ فاذا كانت النهايه موجوده عندما $Z=Z_0$ فأنه يقال أن الداله $f(Z)$ هي داله تحليليه في النقطه Z_0 . واذا كانت النهايه موجوده عند جميع قيم Z في الحاله فأنه يقال أن $f(Z)$ تحليليه في المنطقه S . ولكي تكون $f(Z)$ تحليليه فأنها يجب أن تكون وحيده القيمه . ولها تفاضل مستمر أو متصل العكس كيفما كان وليس دائماً صحيحاً .

مثال/ برهن أن $\frac{d\bar{Z}}{dZ}$ حيث $\bar{Z}$ هي المرافق المعقد للعدد Z لا توجد عند اية نقطه اي أن $f(Z)=\bar{Z}$ داله ليست تحليليه

الحل/ من تعريف المشتقة نحصل على

$$\frac{d}{dZ} f(Z) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(Z+\Delta Z) - f(Z)}{\Delta Z}$$

$$\because f(Z) = \bar{Z}$$

$$\frac{d\bar{Z}}{dZ} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\overline{Z+\Delta Z} - \bar{Z}}{\Delta Z}$$

let $Z = x + iy \Rightarrow \Delta Z = \Delta x + i\Delta y$

$$\frac{d\bar{Z}}{dZ} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\overline{(x+iy)+(\Delta x+i\Delta y)} - \overline{(x+iy)}}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

$\Delta Z \to 0$ ، $\Delta x \to 0$ ، $\Delta y \to 0$

١- عندما $\Delta y = 0$

$$\therefore \frac{d\bar{Z}}{dZ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

٢- عندما $\Delta x = 0$

$$\frac{d\bar{Z}}{dZ} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

وهذا يعني أن النهاية تعتمد على الطريقة التي بها $\Delta y = 0$ ولذلك المشتقة تعتمد على الطريقة التي بها $\Delta Z \to 0$ وهذه المشتقة غير موجوده للداله $f(z) = \bar{Z}$ ولذلك فأن هذه الداله داله غير تحليليه ،

مثال/ أذا كانت $\omega = f(z) = \frac{1+Z}{1-Z}$ أوجد $\frac{dw}{dZ}$ ثم عين أين تكون الداله ω داله غير تحليليه.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{(1-Z)*1 - (1+Z)*(-1)}{(1-Z)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-Z)^2}$$

عندما $(1-Z)^2 = 0$

$\therefore Z \neq 1$

$\therefore$ الداله ω داله تحليليه في جميع النقاط ماعدا $Z=1$ وتسمى هذه النقطه بالنقطه المنفرده.

ملاحظة/ جميع قواعد المشتقة للدوال الحقيقية تنطبق على الدوال المعقدة كما أن جميع قوانين التفاضل للدوال الأولية الحقيقية تنطبق على الدوال الأولية المعقدة (راجع الفصل السابق) وعلى سبيل المثال

$$\frac{d}{dZ} C = 0$$ حيث C ثابت معقد

$$\frac{d}{dZ} Z^{n} = n Z^{n-1} \quad , \quad \frac{d}{dZ} e^{Z} = e^{Z}$$

$$\frac{d}{dZ} \sin Z = \cos Z$$

معادلات كوشي ـ ريمان التفاضليه

نفرض أن $w=f(z)$ حيث

$$Z=x+iy$$
$$w=u+iv$$

وأن u و v دوال الى x و y اي أن

$$u=u(x,y) \quad و \quad v=v(x,y)$$

من تعريف المشتقه نحصل على

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} \quad \text{-----} \quad (1)$$

حيث

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$
$$\Delta w=\Delta u+i\Delta v$$

من تعريف التفاضل الكلي للدوال u ، v

$$\Delta u\cong\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

$$\Delta v\cong\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

العلامه $\cong$ موجوده لأننا حذفنا مقدار صغير من المعادله ... هذا المقدار يصبح صفر عندما $\Delta x\to 0$ أو $\Delta y\to 0$

بالتعويض في المعادله (1) نحصل على

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}$$

بالقسمه على Δx نحصل على

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

حيث $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

$m\,(\text{الميل}) = \frac{dy}{dx}$

let

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{.....} (a)$$

$$B = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{.....} (b)$$

$$\therefore \frac{dw}{dz} = \frac{A + Bm}{1 + im} \quad \text{.....} (2)$$

الآن لكي تكون $\frac{dw}{dz}$ دالة تحليلية يجب أن لا تعتمد على الطريقة التي بها $\Delta Z \to 0$ اي أنها لا تعتمد على $m = \frac{dy}{dx}$

نشتق المعادلة (2) بالنسبة الى m

$$\frac{\partial w'}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{A + Bm}{1 + im}\right)$$

$$= \frac{(1+im)B - (A+Bm)i}{(1+im)^2} \quad \text{.....} (3)$$

$\therefore$ w' لا تعتمد على m

$$\therefore \frac{(1+im)B - (A+Bm)i}{(1+im)^2} = 0$$

$$(1+im)B - (A+Bm)i = 0$$

$$B + \cancel{iBm} - Ai - \cancel{Bmi} = 0$$

$$B - Ai = 0 \Rightarrow B = iA \quad \text{.......} (4)$$

∴ من المعادلة a و b نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots\ldots (6)$$

المعادلة 5 و 6 تسمى معادلات كوشي ريمان التفاضلية ويمكن كتابة هذه المعادلة بصيغة ثانية

$$\boxed{\begin{aligned} U_y &= -V_x \\ U_x &= V_y \end{aligned}}$$

$$Z = x + i\,y$$
$$W = u + iV$$

من المعادلة 2 و 4 و a و b نحصل على

$$\frac{dw}{dz} = \frac{A+Bm}{1+im} \quad \ldots (2)$$

$$B = iA \quad --- (4)$$

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots (a) \quad , \quad B = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots (b)$$

بالتعويض عن $B=iA$ في المعادلة (2) نحصل على

$$\frac{dw}{dz} = \frac{A+iAm}{1+im} = A$$

من المعادلة a ، b نحصل على

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad \ldots\ldots (A)$$

مثال/ في الديناميكا الهوائية وميكانيك الموائع «غاز أو سائل» تسمى الدالة ϕ ، ψ في $f(z) = \phi + i\psi$ حيث $f(z)$ دالة تحليلية بجهد السرعة ودالة التيار على التوالي ... اذا كانت

$$\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$$

أوجد

أ) ψ ب) $f(z)$

$$\because z = x + iy$$

$$w = f(z) = \phi + i\psi$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_x &= \psi_y \quad \text{-----} \; (1) \\ \phi_y &= -\psi_x \quad \text{-----} \; (2) \end{aligned}\right\}$$ معادلات كوشي

$$\because \phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$$

$$\phi_x = 2x + 4 \quad \text{-----} \; (3)$$

$$\phi_y = -2y + 2 \quad \text{-----} \; (4)$$

من معادلة (1) و(3) نحصل على

$$\psi_y = 2x + 4$$

$$\psi = 2xy + 4y + C(x) \quad \text{-----} \; (5)$$ بالتكامل الى (y)

نشتق بالنسبة الى x فنحصل على

$$\psi_{(x)} = 2y + \frac{\partial C(x)}{\partial x}$$

ومن المعادلة (2) و(4) نحصل على

$$\cancel{2y} - 2 = \cancel{2y} + \frac{\partial C(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial C(x)}{\partial x} = -2 \Longrightarrow C(x) = -2x + C$$

وبالتعويض في المعادلة (5) نحصل على

$$\psi = 2xy + 4y - 2x + c$$

$$\therefore f(z) = \phi + i\psi$$

$$= x^2 + 4x - y^2 + 2y + i(2xy + 4y - 2x + c)$$

$$= x^2 + 4x - y^2 + 2y + i(2xy + 4y - 2x) + C$$

حيث $C = ic$ وهو ثابت معقد

$$= x^2 - y^2 + 2xyi + 4(x + iy) - 2i(x + iy) + C$$

$$= z^2 + 4z - 2iz + C$$

ملاحظة 1

قلنا سابقاً أن الشرط الواجب توفره لكي تكون الدالة تحليلية في منطقة ما هو وجود النهاية لهذه الدالة دون الاعتماد على الطريقة التي بها $\Delta z = 0$

ملاحظة 2

نقول الآن أن الشرط الكافي لكي تكون الدالة تحليلية في منطقة ما هو أن تتحقق معادلات كوشي - ريمان التفاضلية .