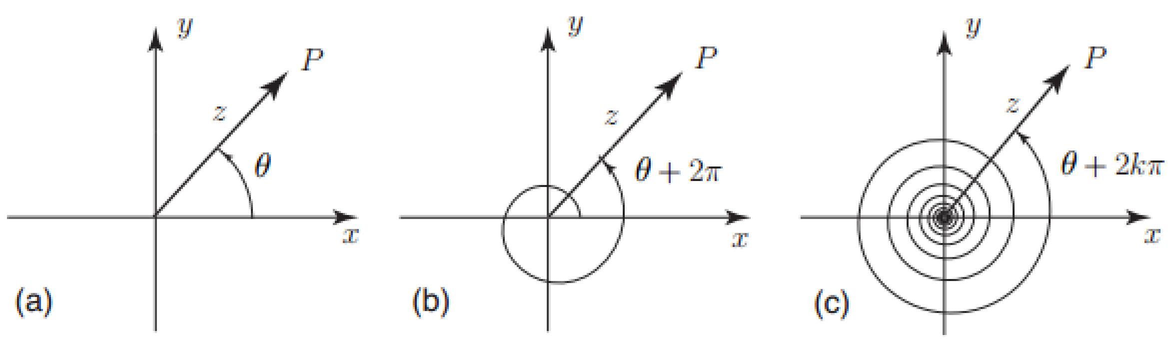
مثال: افرض ان $z = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$. اكتب z بالصيغة $z = x + iy$ (الصيغة الكارتيزية).

الحل: لدينا العلاقة:
$$z = re^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 2e^{\frac{2\pi i}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

ملاحظة: لأي عدد عقدي $z \neq 0$ توجد فقط قيمة واحدة للسعة θ في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$. في الشكل ادناه الزاوية θ التي صنعها z مع المحور الموجب كما في الشكل a. لذلك وكما في الشكل b نرى انه يمكن اضافة 2π او 360^0 ونحصل على نفس z في المستوي xy. في العموم، وكما مبين في الشكل c اي مضاعف صحيح من 2π يمكن اضافته الى او طرحه من θ بدون ان يؤثر على الصيغة الكارتيزية للعدد المعقد.



الشكل(٣).

على سبيل المثال

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$ الصيغة القطبية

ومع ذلك يمكن كتابة الصيغة اعلاه بالصورة المكافئة التالية:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\,\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)\right)$$

او بصورة اعم:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\,\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\pm, \dots\dots$$

حيث ان k هو عدد صحيح. ان الصيغة الاخيرة تبين بأن الصيغة القطبية للعدد العقدي z ، $arg\, z$ ، يمكن ان تأخذ عدد غير محدد من القيم، كل قيمة تختلف عن الاخرى بـ $2k\pi$. هذا ليس اكثر من نتيجة لخواص الدوال المثلثية لأي عدد صحيح k :

$$\cos(\theta + 2k\pi) \equiv \cos(\theta) \quad , \quad \sin(\theta + 2k\pi) \equiv \sin(\theta),$$

تمارين: نشاط صفي

١- $z = \sqrt{3} + i$.

٢- $z = -\sqrt{3} - i$

نظرية دي موفر De Moivre's theorem

اذا كان

$$z = r\ \cos\theta + ir\sin\theta$$

و

$$w = t\cos\varphi + it\sin\varphi$$

عندئذ حاصل ضرب zw وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = cos\theta_1 cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\, cos\theta_2 + \sin\theta_2\, cos\theta_1$$

يكون

$$zw = (r\ \cos\theta + ir\sin\theta).(t\ \cos\varphi + ir\sin\varphi) = rt\,[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)]$$

حالة خاصة: اذا كان $r = 1,\ t = 1$ و $\theta = \varphi$ بمعنى $z = w = \cos\theta + i\sin\theta$

نحصل

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

لو ضربنا كلا الطرفين بـ $\cos\theta + i\sin\theta$ ، نحصل:

$$z^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

لو ضربنا كلا الطرفين بـ $\cos\theta + i\sin\theta$ ، نحصل:

$$z^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$$

لعدد معين من عمليات الضرب p نحصل

$$z^p = (\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta)$$

حيث p عدد صحيح. في الحقيقة هذه النتيجة يمكن ان تصح للحالات التي يكون فيها عدد p صحيح سالب او عدد منطقي مثل $\frac{1}{2}$. هذه النتيجة تسمى نظرية دي موفر.

مثال: باستخدام نظرية دي موفر، جد $z^8 = (1+i)^8$ بالصيغة $x + iy$ (الصيغة الكارتيزية).

الحل: ان نظرية دي موفر تطبق على الاعداد المعقدة بالصيغة القطبية.

اولاً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2} = \sqrt{2}$$

ثانياً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

نكتب $1 + i$ بالصيغة القطبية $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ من خلال:

$$1 + i = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نستخدم نظرية دي موفر:

$$(1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^8 = 16(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$$

$$(1+i)^8 = 16(1+i0)$$

$$(1+i)^8 = 16+i0$$

مثال: باستخدام نظرية دي موفر، جد $z^{10} = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$ بالصيغة $x+iy$ (الصيغة الكارتيزية).

الحل: ان نظرية دي موفر تطبق على الاعداد المعقدة بالصيغة القطبية.

اولاً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2} = 2$$

ثانياً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

نكتب $-1+\sqrt{3}i$ بالصيغة $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ من خلال:

$$-1+\sqrt{3}i = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

نستخدم نظرية دي موفر:

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = \left[2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]^{10} = (2)^{10}\left(\cos\left(10\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(10\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = 1024\left(\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)\right)$$
$$= 1024\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = 1024(-0.5+0.866i)$$

تمارين: نشاط صفي

باستخدام نظرية دي موفر، جد بالصيغة $x+iy$ (الصيغة الكارتيزية) لكل مماياتي.

١- $z^{15} = (1+i)^{15}$.

٢- $z^7 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^7$