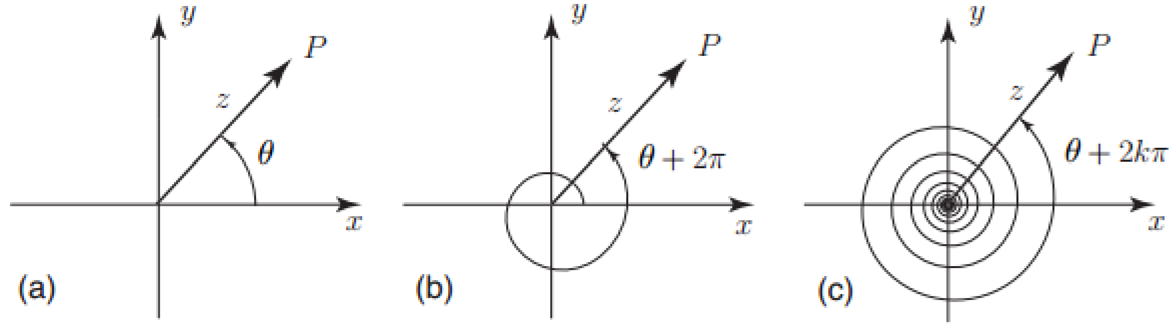
ملاحظة: لأي عدد عقدي $z \neq 0$ توجد فقط قيمة واحدة للسعة θ في الفترة $0 \leq \theta \leq 2\pi$. في الشكل ادناه الزاوية θ التي صنعها z مع المحور الموجب كما في الشكل a. لذلك وكما في الشكل b نرى انه يمكن اضافة 2π او 360^0 ونحصل على نفس z في المستوي xy. في العموم، وكما مبين في الشكل c اي مضاعف صحيح من 2π يمكن اضافته الى او طرحه من θ بدون ان يؤثر على الصيغة الكارتيزية للعدد المعقد.



الشكل(٣).

على سبيل المثال

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$ الصيغة القطبية

ومع ذلك يمكن كتابة الصيغة اعلاه بالصورة المكافئة التالية:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)\right)$$

او بصورة اعم:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm, \dots \dots$$

حيث ان k هو عدد صحيح. ان الصيغة الاخيرة تبين بأن الصيغة القطبية للعدد العقدي z ، $arg\{z\}$ ، يمكن ان تأخذ عدد غير محدد من القيم، كل قيمة تختلف عن الاخرى بـ $2k\pi$ وبالتالي:

$$arg\{z\} = Arg\{z\} + 2k\pi$$

هذا ليس اكثر من نتيجة لخواص الدوال المثلثية لأي عدد صحيح k :

$$\cos(\theta + 2k\pi) \equiv \cos(\theta) \quad , \quad \sin(\theta + 2k\pi) \equiv \sin(\theta),$$

بصورة عامة فأن المعادلة (8) تصبح:

$$z = r\,(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) = re^{i(\theta+2k\pi)} \qquad (8)$$

مثال:

$$\sqrt{3} + i = 2\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2i\,sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\,cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) + 2i\,sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

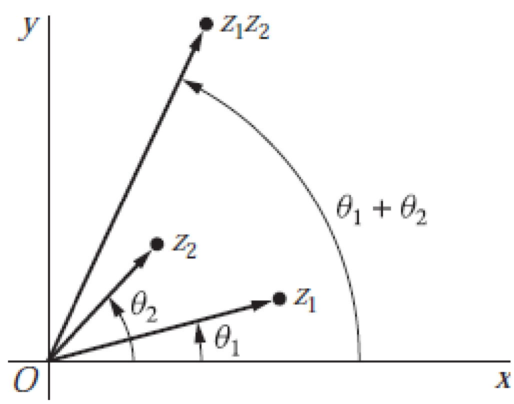
مثال:

$$-\sqrt{3} - i = 2\,cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2i\,sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\,cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right) + 2i\,sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

ضرب وقسمة الاعداد العقدية بالصيغة القطبية والآسية

اذا كان z_1 و z_2 هما عددان عقدين لهما الصيغ القطبية التالية:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$



اولاً :سنجد حاصل ضرب العددين z_1 و z_2

$$z_1z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2]$$

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 +)]$$

باستخدام المتطابقات المثلثية:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2$$

اذن

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ومنها نحصل

$$arg\{z_1z_2\} = arg\{z_1\} + arg\{z_2\} = \theta_1 + \theta_2$$

وبدلالة صيغة اويلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ فأن

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

ثانياً: سنجد قسمة العددين العقدين

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

ومنها نحصل

$$arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = arg\{z_1\} - arg\{z_2\} = \theta_1 - \theta_2$$

مثال: جد $arg\{z_1 z_2\}$، اذا علمت بأن $z_1 = -1$ و $z_2 = i$

الحل:

$$arg\{z_1 z_2\} = arg\{z_1\} + arg\{z_2\} = \theta_1 + \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

مثال: جد $arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\}$، اذا علمت بأن الصيغ الكارتزية لكل من z_1 و z_2 هي: $z_1 = -2$ و

$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

الحل:

$$arg\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = arg\{z_1\} - arg\{z_2\} = \theta_1 - \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

مثال: جد بالإحداثيات الكارتزية $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$، اذا علمت بأن الصيغ القطبية لكل من z_1 و z_2 هي:

$$z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \text{ و } z_1 = 12\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

الحل:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] = 48\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_1 z_2 = 48[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -48 + 0i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{12}{4}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0 + 3i$$

تمرين: جد بالإحداثيات الكارتزية $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$، اذا علمت بأن الصيغ الكارتزية لكل من z_1 و z_2 هي:

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ و } z_1 = 8i$$