الفصل الاول

الاعداد العقدية Complex Number

التمهيد: لماذا نظام الاعداد العقدية ؟: لقد تعلمنا سابقاً ان حل المعادلة:

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (1)$$

باستخدام طريقة الدستور هو:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

وعرفنا ان جذور المعادلة (1) حقيقية عندما يكون المقدار تحت الجذر $(b^2 - 4ac \geq 0)$ موجب، اما اذا كان المقدار $b^2 - 4ac < 0$ فهذا يعني ان جذور المعادلة (1) ليست ضمن نظام الاعداد الحقيقية.

كذلك هو الحال بالنسبة للمعادلة:

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad (3)$$

لذلك اقتضت الضرورة وجود نظام اعداد اخر يقع ضمنه الحلول الغير الحقيقية للمعادلات. لقد وضع العالم الرياضي **كاوس** نظام اعداد جديد يشمل على:

١- يشمل جميع الاعداد الحقيقية.

٢- يشتمل على $\boldsymbol{i}$ **الوحدة التخيلية والتي لها الخاصية** $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

هذا النظام هو **نظام الاعداد العقدية**، حيث يعتبر $\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$ اساس هذا النظام.

اليك بعض الامثلة البسيطة:

اليك مجموعة من الاعداد التالية:

$$\sqrt{-16} = 4i, \qquad \sqrt{-3} = i\sqrt{3}, \qquad i^3 = -i$$

هذه هي اعداد **خيالية**. لكن مجموعة الاعداد التالية:

$$\sqrt{-2}\sqrt{-8} = i\sqrt{-2}.i\sqrt{-8} = -4, \qquad i^2 = -1$$

هي اعداد **حقيقية**.

الاجزاء الحقيقة والخيالية للعدد العقدي

Real and Imaginary Parts of a Complex Number

لو رجعنا الى المعادلة (1) وعوضنا عن $a = 1$ و $b = -2$ و $c = 2$، فأنها تصبح:

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad (4)$$

حل المعادلة (4) يكون:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

حيث نلاحظ ان جذري z لهما جزء حقيقي والاخر خيالي معاً ، لذلك سنطلق مصطلح العدد العقدي على z ليعني المجموعة الكاملة للأعداد الحقيقية والخيالية او تركيب الاثنين معاً. لتوضيح اكثر، ان العدد العقدي $z = a + ib$ مركب من جمع حدين، الحد الحقيقي (لا يحتوي على i) ويسمى الجزء الحقيقي (العدد الحقيقي) للعدد العقدي ويرمز له $Re\{z\}$. ومعامل i في الحد الاخر يسمى بالجزء الخيالي (العدد الخيالي) للعدد العقدي ويرمز له $Im\{z\}$، حيث ان b هو ليس خيالياً. ان الجزء الحقيقي او الخيالي للعدد العقدي ممكن ان يكون صفراً، فاذا كان الجزء الحقيقي صفراً ، فأن العدد العقدي يكون خياليا، اما اذا كان الجزء الخيالي للعدد العقدي صفراً، فأن العدد العقدي يكون حقيقاً. يمكن ان نكتب العدد العقدي على شكل زوج من الاعداد الحقيقية، الجزء الحقيقي اولاً ومن ثم الجزء الخيالي، فمثلاً يمكن كتابة العدد العقدي $5 + 3i$ على الشكل التالي $(5,3)$. ان هذا ليس الشكل المناسب جداً في الحسابات، لكنه يستخدم في التمثيل الهندسي للعدد العقدي.

أن الاعداد العقدية لها اهمية كبيرة في مجالات تطبيقية عديدة مثل الهندسة الكهربائية وكذلك في حل المعادلات التفاضلية في فروع الفيزياء المختلفة بالإضافة الى حقول متقدمة في الرياضيات تتعامل مع دوال المتغير العقدي التي تعطي طرق مفيدة متعددة لحل التمارين حول انسياب الموائع ، الكهربائية ، ميكانيك الكم.

العمليات الحسابية الجبرية للأعداد العقدية

Algebraic Calculations of Complex Numbers

يمكن القيام بالعمليات الجبرية للأعداد العقدية باتباع نفس الاسلوب في جبر الاعداد الحقيقية، لأجراء العمليات الاربعة الحسابية، نفترض لدنيا العددين العقدين $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$:

١- عملية الجمع:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

٢-عملية الطرح

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

٣-عملية الضرب

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

٤-عملية القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال: اجري العمليات الحسابية الاربعة للعددين العقدين $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 3 - i$ ،.

الحل:

1)

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = 5 + i0 = 5$$

2)

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = -1 + 2i$$

3)

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 7 + i$$

4)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

اذا كان لدينا z_1 ، z_2 و z_3 ثلاث اعداد عقدية، فأنه تخضع الى القوانين التالية:

١- قانون التبديل للجمع $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

٢- قانون التنسيق للجمع $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

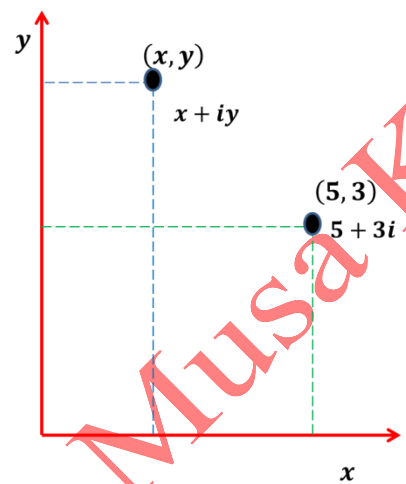
٣- قانون التبديل للضرب $z_1 z_2 = z_2 z_1$

٤- قانون التنسيق للضرب $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

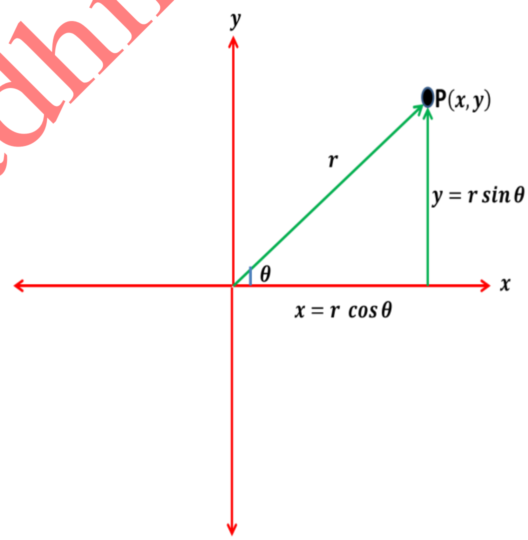
٥- قانون التوزيع $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

المستوي العقدي The Complex Plane

في الهندسة التحليلية، يمكن رسم النقطة $(5,3)$ كما موضح بالشكل ادناه. كما رأينا، ان الرمز $(5,3)$ قد يعني ايضاً العدد العقدي $5 + 3i$. لهذا فالنقطة $(5,3)$ تدل اما على $(5,3)$ أو $5 + 3i$. بنفس الطريقة ، اي عدد عقدي $x + iy$ $(x, y$ حقيقيان$)$ يمكن تمثيله في المستوي xy كذلك اي نقطة (x, y) في المستوي xy يمكن تمثيلها بـ $x + iy$ بالإضافة الى (x, y). عندما يستخدم المستوي xy بهذه الطريقة لرسم الاعداد العقدية، فأنه يسمى **بالمستوي العقدي** حيث يكون x يمثل المحور الحقيقي و y المحور.



الشكل(١)



الشكل(٢)

عندما يكتب العدد العقدي بالصيغة $z = x + iy$، نقول انه بالصيغة التعامدية لأن x و y هي الاحداثيات المتعامدة للنقطة التي تمثل العدد في المستوي العقدي. في الهندسة التحليلية، يمكننا تعيين موضع النقطة بإعطاء احداثياتها القطبية (الاسطوانية)(r, θ) بدلاً من احداثياتها المتعامدة (x, y).

$$x = r \cos\theta, \qquad y = r \sin\theta \qquad r \geq 0 \qquad (5)$$

حيث ان $r \geq 0$, وان r, θ الاحداثيين القطبيين للنقطة (x, y) المقابلة للعدد العقدي $z = x + iy$ بالصيغة الكارتزية. يمثل r يمثل **طول العدد العقدي** z ويكون

$$r = |z|$$

او ان

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

مثال: جد القيمة r للأعداد العقدية التالية:

١- $z = 5 + 10i$
٢- $z = 3 - 2i$
٣- $z = -3$
٤- $z = 2i$

الحل: يمكن استخراج قيمة r من الصيغة الرياضية التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

1- $r = |z| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$
2- $r = |z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
3- $r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$
4- $r = |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

اما الزاوية θ التي يصنعها متجه العدد العقدي z مع المحور الحقيقي باتجاه الموجب (بعكس اتجاه عقرب الساعة) وتسمى **بزاوية العدد العقدي** او الزاوية القطبية ويرمز لها بالرمز $arg\{z\}$ (او تسمى سعة او طور او الازاحة الزاوية للعدد العقدي). ومن المعادلة (5) نحصل على:

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (6)$$

ان المعادلة (6) تسمى **الصيغة القطبية** للعدد العقدي.

يمكن استخراج زاوية العدد العقدي من خلال المعادلة (5):

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (7)$$

ان الصيغة الرياضية لعلاقة اويلر تعطى بالعلاقة التالية:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

وبالتالي يمكن كتابة العدد العقدي في المعادلة (6) باستخدام صيغة اويلر **بالصيغة الاسية** كما في الشكل التالي:

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \qquad (8)$$

مثال: جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = 5 - 5i$ مع الرسم.

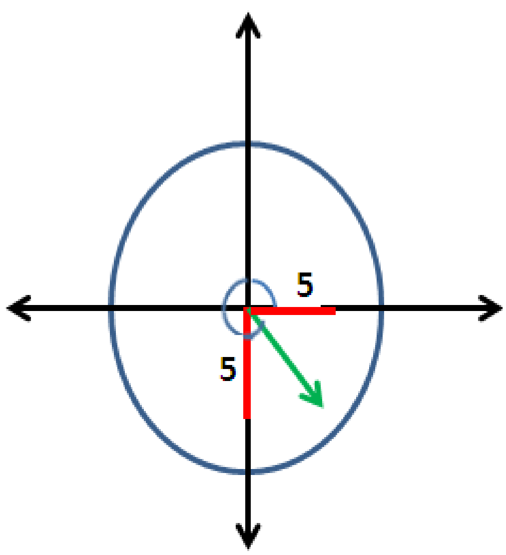
الحل:

اولاً: نقوم بتعين الجزء الحقيقي والخيالي في المستوي العقدي. ان الجزء الحقيقي موجب والخيالي سالب فأن العدد العقدي z يقع في الربع الرابع للمستوي العقدي

ثانياً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2}$$

$$r = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$



ثالثاً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-5}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}(-1) = \frac{7\pi}{4}$$

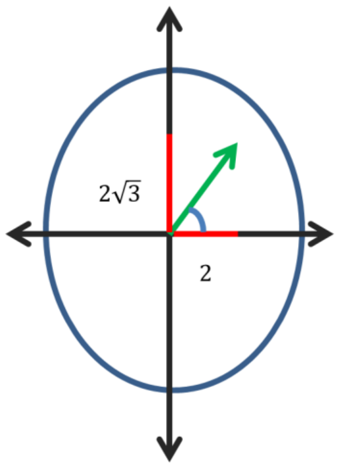
ان قيمة الزاوية θ بالنصف قطرية ، لذلك فأن الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي تكون بالشكل التالية:

$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{50}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

مثال: جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ مع الرسم.

الحل:

اولاً: نقوم بتعين الجزء الحقيقي والخيالي في المستوي العقدي. العدد العقدي z يقع في الربع الاول للمستوي العقدي.



ثانياً: نستخرج قيم r من خلال المعادلة التالية:

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4$$

ثالثاً: نستخرج الزاوية θ من خلال العلاقة التالية:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

لذلك فأن الصيغة القطبية للعدد العقدي تكون بالشكل التالية:

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

تمارين

١- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = -5 + 5i$ مع الرسم.

٢- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ مع الرسم.

٣- جد الصيغة القطبية والآسية للعدد العقدي من الصيغة الكارتيزية $z = -3i$ مع الرسم.