الطريقه الثانيه في حل معادلة شرودنجر للمتذبذب التوافقي (الطريقه التحليليه)

نعود الان الى معادلة شرودنجر (المعادله 3-47)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{1}{2}mw^2x^2\Psi=E\Psi \quad .... \quad (68\text{-}3)$$

ونحلها مباشرة بطريقة المتسلسلات (series) لنفكر بمتغير خالي من الوحدات (بلا ابعاد Dimensionless)

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{mw}{\hbar}}\ x \quad .... \quad (69\text{-}3)$$

وبدلالة هذا المتغير تكون معادلة شرودنجر

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}=\left(\xi^2-k\right)\Psi \quad .... \quad (70\text{-}3)$$

أذ ان k تمثل الطاقه بوحدات $\frac{1}{2}\hbar w$

$$k=\frac{2E}{\hbar w} \quad .... \quad (71\text{-}3)$$

هدفنا حل المعادله (3-70) وخلال العمليه ايجاد قيمة k (الطاقات المسموح بها E)

وفي البدء اذا كانت ξ كبيره جدا (x كبيره جدا) فان ξ^2 ستكون اكبر بكثير من الثابت k

وفي هذا النظام ستكون معادلة شرودنجر

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}\approx\xi^2\Psi \quad .... \quad (72\text{-}3)$$

والتي لها الحل التقريبي

$$\Psi(\xi)\approx Ae^{-\frac{\xi^2}{2}}+Be^{\frac{\xi^2}{2}} \quad .... \quad (73\text{-}3)$$

الحد الذي يحتوي B يكون كبير جدا لذلك نجعل الثابت $B=0$ فيكون الحل

$$\Psi(\xi)=(\quad)\,e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad .... \quad \text{عند } x \text{ الكبيره} \quad (74\text{-}3)$$

سنضع في هذا القوس الفارغ دالة تصحيح الى $\Psi(\xi)$ وسنسمي هذه الداله $h(\xi)$

فيكون الحل

$$\Psi(\xi) = h(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (74\text{-}3)$$

نفاضل المعادله (3-74) لنوجد المشتقه الاولى والثانيه ونعوضها في العلاقه (3-70)

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \left(\frac{dh}{d\xi} - \xi h\right) e^{-\xi^2/2}$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = \left(\frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh}{d\xi} + (\xi^2 - 1)h\right) e^{-\xi^2/2}$$

نعوض في العلاقه (3-70)

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh}{d\xi} + (k-1)h = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (75\text{-}3)$$

سنفكر بحل للمعادله (3-75) من نوع متعدد الحدود في ξ

$$h(\xi) = a_0 + a\ \xi + a_2\xi^2 + \cdots\cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j \quad \ldots\ldots \qquad (76\text{-}3)$$

نشتق المتعدد حد بعد حد

$$\frac{dh}{d\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \cdots\cdots = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j \xi^{j-1}$$

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} = 2a_2 + 2*3a_3\xi + 3*4a_4 + \cdots\cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)a_{j+2}\xi^j$$

نعوض هذه النتائج في المعادله (3-75) نحصل على

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (k-1)a_j\right]\xi^j = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (77\text{-}3\ )$$

يتضح من المعادله الاخيره ولاجل ان تكون صحيحه ومساويه للصفر يجب ان تكون كل المعاملات داخل القوس مساويه للصفر

$$(j+1)(j+2)a_{j+2} - 2ja_j + (k-1)a_j = 0$$

ومنها

$$a_{j+2} = \frac{(2j+1-k)}{(j+1)(j+2)} a_j \quad .... \qquad (78\text{-}3)$$

علاقة التكرار هذه مكافئه تماما الى معادلة شرودنجر، عند البدء ب a_0 يمكن توليد كل الحدود الزوجيه

$$a_2 = \frac{1-k}{2} a_0$$

$$a_4 = \frac{5-k}{12} a_2 = \frac{(5-k)(1-k)}{24} a_0$$

وعند البدأ ب a_1 يمكن توليد كل الحدود الفرديه

$$a_3 = \frac{(3-k)}{6} a_1$$

$$a_5 = \frac{(7-k)}{20} a_3 = \frac{(7-k)(3-k)}{120} a_1$$

ويكون الحل الكامل هو

$$h(\xi) = h_{even}(\xi) + h_{odd}(\xi) \quad .... \qquad (79\text{-}3)$$

أذ ان الحدود الزوجيه

$$h_{even}(\xi) = a_0 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + \cdots$$

اما الحدود الفرديه

$$h_{odd}(\xi) = a_1\xi + a_3\xi^3 + a_5\xi^5 \cdots$$

ليس كل الحلول يمكن معايرتها وعلى سبيل المثال اذا كانت j كبيره جدا فان

علاقة التكرار (78-3) يمكن تقريبها الى $a_{j+2} \approx \frac{2}{j} a_j$ بحل تقريبي $a_j \approx \frac{C}{(j/2)!}$

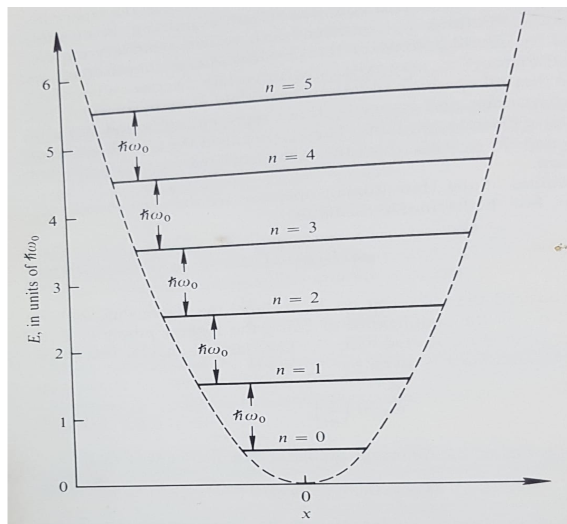
لبعض الثوابت C وهذا يعطي (عند قيم كبيره من ξ عندما تسود القوى الكبيره)

$$h(\xi) \approx C \sum \frac{1}{(j/2)!} \xi^j$$

$$\approx C \sum \frac{1}{j!} \xi^{2j} \approx Ce^{\xi^2}$$

وهذا اذا كانت h لها صيغه اسيه بـ ξ^2 فان الداله Ψ ستكون بصيغه اسيه($\exp(\xi^2/2)$) وهو حل غيرمرغوب. وللخلاص من هذا الاشكال يجب ان تتوقف صيغة متعدد الحدود عند حد معين وهنا يجب ان تكون هناك قيمه عليا الى j وهي n وعندها $a_{n+2}=0$ وهذا يؤدي الى قطع السلسلهالزوجيه والفرديه ل $h(\xi)$. ولحل مقبول فيزياويا فان العلاقه (3-78) تتطلب ان يكون $k=2n+1$ وعليه من العلاقه (3-71)

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w, \qquad \text{for } n=0,1,2,....... \qquad (80\text{-}3)$$



مستويات الطاقه للمتذبذب التوافقي حسب المعادله (3-80)

اذا وضعنا قيمة $k=2n+1$ في علاقة التكرار (3-78) نحصل على

$$a_{j+2}=\frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)}a_j \quad .... \qquad (81\text{-}3)$$

اذا وضعنا $n=0$ واهملنا a_1 لكي نترك الحدود الفرديه فعند قيمة $j=0$ فان $a_2=0$ وبذلك يكون

$$h_0(\xi)=a_0$$

ومنه

$$\Psi_0(\xi)=a_0e^{-\xi^2/2}$$

لقيمة $n = 1$ وناخذ $a_0 = 0$ ومع قيمة $j = 1$ نحصل على $a_3 = 0$ يكون

$$h_1(\xi) = a_1 \xi$$

ومنه

$$\Psi_1(\xi) = a_1 \, \xi \, e^{-\xi^2/2}$$

بصوره عامة فان $h_n(\xi)$ متعدد حدود من الرتبه n في ξ وهو يسمى متعدد حدود هرمت $H_n(\xi)$ (Hermite polynomials)

وبدلالة متعدد حدود هرمت تكون دالة المتذبذب التوافقي هي

$$\Psi_n(x) = A_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

ولكون $\xi = \sqrt{\alpha x}$ فأن

$$\Psi_n(x) = A_n H_n(\sqrt{\alpha} x) e^{-\alpha x^2/2}$$

من بين علاقات متعدد حدود هرمت التكامليه والتفاضليه التي انجزهاالعاملون في الرياضيات

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi} \; \delta_{\mathrm{nm}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85\text{-}3)$$

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{mw}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86\text{-}3)$$

والجدول التالي يوضح بعض قيم متعدد حدود هرمت $H_n(\xi)$

$$H_0 = 1$$
$$H_1 = 2\xi$$
$$H_3 = 4\xi^2 - 2$$
$$H_4 = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$$
$$H_5 = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$$

وان $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\xi^2}$ .... (87-3)

وكذلك فان

$$2\xi \, H_n(\xi) = H_{n+1}(\xi) + 2n \, H_{n-1}(\xi)$$

$$\frac{dH_n(\xi)}{d\xi} = 2n \, \mathrm{H}_{\mathrm{n-1}}(\xi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (88\text{-}3)$$

من المعادله الثانيه في العلاقه (3-88) يمكننا مباشرة حساب ثابت المعايره

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_n^*(x)\Psi_n(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}A_n^2 H_n^2(\xi)e^{-\xi^2}dx = 1$$

$$\frac{A_n^2}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2(\xi)e^{-\xi^2}d\xi = 1$$

$$\frac{A_n^2}{\sqrt{\alpha}}(2^n n!\sqrt{\pi}) = 1$$

ومنه نجد ان

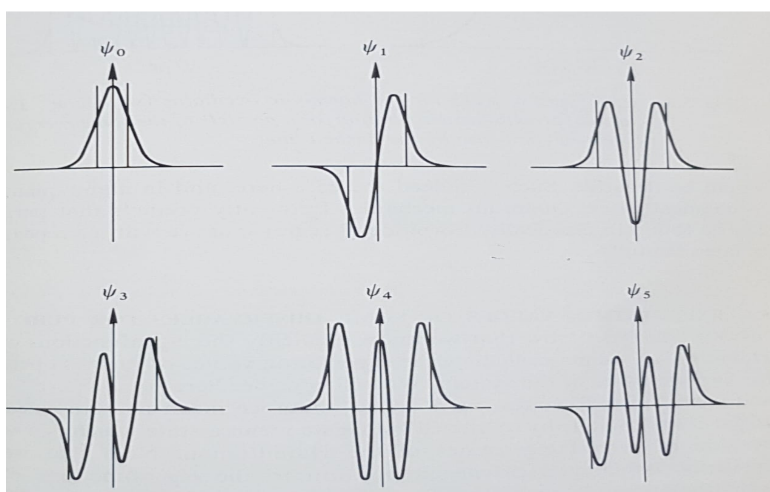
$$A_n = \left[\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad .... \quad (89\text{-}3)$$

المتذبذب التوافقي الكلاسيكي له نقاط رجوع عند الازاحه التي فيهاتكون طاقة الجسيم الكامنه تساوي الطاقه الكليه(الطاقة الحركيه تساوي صفر)

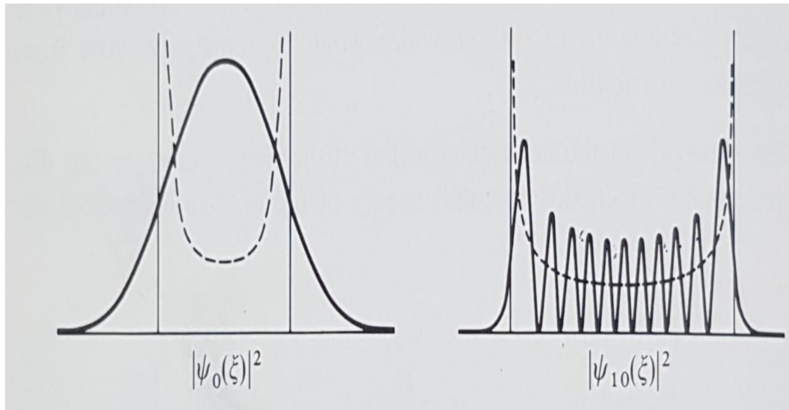
وتعطى نقاط الرجوع عند $x_{\max.} = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$.

وعند النظر للميكانيك الكمي نلاحظ ان توزيع الاحتماليه ان هناط نقطهانقلاب تشبه تصرف نقاط الرجوع الكلاسيكيه ونقطة الانقلاب هذه عندها يكون

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_n(x) = 0 \quad .... \quad (90\text{-}3)$$



$\Psi_n(x)$ مقابل x ، الدوال الموجيه الستة الاولى للمتذبذب التوافقي والناتجه من حل معادلة شرودنجر والخطوط العموديه تمثل نقاط الرجوع الكلاسيكيه



الخطوط المنقطه تمثل توزيع الاحتماليه الكلاسيكيه للجسيم ولنفس الطاقه اما الخطوط المتصله فتمثل التوزيع الكمي

حسابات القيمه المتوقعه: **Expectation value calculations**

1- لنبدأ بايجاد القيمه المتوقعه للموقع x للحاله $\Psi_n(x,t)$

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x.t) \ x \ \Psi_n(x,t) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) e^{+\frac{i}{\hbar}E_n t} \ x \ \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \; x \; \psi_n(x) \; dx$$

$$= A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \; \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}} \; e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{A_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) \; \xi \; H_n(\xi) \; d\xi$$

وباستخدام العلاقه (3-88) نحصل على

$$< x > = \frac{1}{2} \frac{A_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_{n+1}(\xi) d\xi + n \frac{A_n^2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_{n-1}(\xi) d\xi$$

$$< x > = \frac{1}{2} \frac{A_n^2}{\alpha} \delta_{n,n+1} + n \frac{A_n^2}{\alpha} \delta_{n,n-1}$$

$$< x > = 0$$

النتيجه تساوي صفر بسبب تعامد متعدد حدودهرمت. هذه النتيجه توضح احتمالية ان نجد الجسيم في الجهه الموجبه للمحور x بنفس الاحتماليه على الجزء السالب منه وايضا توضح تماثل الاحتماليه حول نقطة الاصل.

2- ايجاد القيمه المتوقعه ل x^2 في الحاله $\psi_n(x)$

$$< x^2 > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) x^2 \psi_n(x) dx$$

$$< x^2 > = \frac{A_n^2}{\alpha\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) \; \xi^2 \; H_n(\xi) \; d\xi$$

نستخدم علاقة التكرار (3-88) مرتين نحصل على

$$\xi^2 H_n(\xi) = \tfrac{1}{4} H_{n+2} + (n + \tfrac{1}{2}) H_n + n(n-1) H_{n-2}$$

نعوض في العلاقه $< x^2 >$ مع ملاحظة عملية التعامد لمتعدد حدودهرمت نحصل على

$$< x^2 > = \frac{(n + \frac{1}{2})}{\alpha} (\frac{A_n^2}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) \; H_n(\xi) \; d\xi = \frac{(n + \frac{1}{2})}{\alpha}$$

$$< x^2 > = \frac{(n + \frac{1}{2})}{\alpha} (1)$$

بالتعويض عن قيمة α نحصل على

$$< x^2 > = (n+\tfrac{1}{2})\frac{\hbar}{(mk)^{\frac{1}{2}}} \qquad .... \qquad (91\text{-}3)$$

اذ ان $\alpha = \frac{mw}{\hbar} = \frac{\sqrt{mk}}{\hbar}$

3- ايجاد القيمه المتوقعه ل p_x في الحاله $\psi_n(x)$

$$< p_x > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \ \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{d}{dx} \ \psi_n(x)dx$$

$$= \frac{\hbar}{i} A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \ \frac{\mathrm{d}}{\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\alpha}}} \ e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha}}$$

اجراء عملية الاشتقاق

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\right) = -\xi \, e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) + e^{-\xi^2/2} \frac{dH_n(\xi)}{d\xi}$$

وباستخدام علاقتي التكرار (3-38) مع بعض التبسيطات نحصل على

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\right) = e^{-\xi^2/2}\left[nH_{n-1}(\xi) - \tfrac{1}{2} H_{n+1}(\xi)\right]$$

وبالتالي نحصل على :

$$< p_x > = \frac{\hbar}{2i} A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\left[nH_{n-1}(\xi) - \tfrac{1}{2} H_{n+1}(\xi)\right] d\xi$$

$$< p_x > = 0$$

بسبب تعامد متعدد حدود هرمت.

4- ايجاد القيمه المتوقعه ل p_x^2 في الحاله $\psi_n(x)$

$$< p_x^2 > = A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \ \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 \ \psi_n(x)dx$$

$$= -\sqrt{\alpha} \ \hbar^2 \ A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \ \frac{d^2}{d\xi^2} \ e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \ d\xi$$

يمكن ايجاد المشتقه الثانيه وتكون النتيجه كالتالي

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\right] = e^{-\xi^2/2}\left[n(n-1)H_{n-2}(\xi) - (n+\tfrac{1}{2})H_n(\xi) + \tfrac{1}{4} H_{n+2}(\xi)\right]$$

$$< p_x^2 > = \sqrt{\alpha}\hbar^2 A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)(n+\tfrac{1}{2}) H_n(\xi) d\xi$$

$$< p_x^2 > = \sqrt{\alpha}\,\hbar^2 (n+\tfrac{1}{2})\left(A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) H_n(\xi) d\xi \right)$$

$$< p_x^2 > = \sqrt{\alpha}\,\hbar^2 (n+\tfrac{1}{2})\left(\sqrt{\alpha}\right)$$

$$< p_x^2 > = \alpha\,\hbar^2 (n+\tfrac{1}{2})$$

5- حساب القيم المتوقعه في الحالات المختلطه

كل القيم المتوقعه التي تم حسابها كانت لحالات مستقره(حالات نقيه) اي ان النظام الكمي(المتذبذب) ليس في حالة حركيه. اما الان فسنقوم بحساب القيم المتوقعه لحالات مختلطه(غير نقيه) ناتجه عن حاله حركيه للنظام وسنأخذ ابسط حاله مختلطه وهي

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_0(x,t) + \Psi_1(x,t)\right]$$

سنحسب اولا كثافة الاحتمال لهذه الحاله

$$\Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[\left(\Psi_0(x,t)+\Psi_1(x,t)\right)^*\left(\Psi_0(x,t)+\Psi_1(x,t)\right)\right]$$

$$\Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[A_0 e^{-\xi^2/2} H_0(\xi) e^{iw_0/2} + A_1 e^{-\xi^2/2} H_1(\xi) e^{3iw_0 t/2}\right]$$

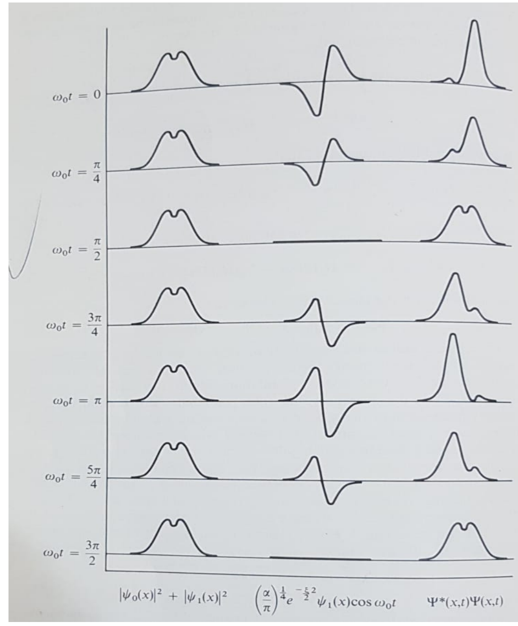
$$*\left[A_0 e^{-\xi^2/2} H_0(\xi) e^{-iw_0/2} + A_1 e^{-\xi^2/2} H_1(\xi) e^{-3iw_0 t/2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|\psi_0(x)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\psi_1(x)\right|^2 + \tfrac{1}{2} A_0 A_1 e^{-\xi^2} H_0(\xi) H_1(\xi)\left(e^{iw_0 t} + e^{-iw_0 t}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|\psi_0(x)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\psi_1(x)\right|^2 + \tfrac{1}{2} A_0 A_1 e^{-\xi^2} H_0(\xi) H_1(\xi)\cos(w_0 t)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left|\psi_0(x)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\psi_1(x)\right|^2 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\xi^2/2}\psi_1(x)\cos(w_0 t)$$

سنرسم المعادله الاخيره لقيم مختلفه من w_0 وقد تم رسم المعادلهالاخيره مجزئه ثم كاملة.



كثافة الاحتمال كداله للزمن لحالة مختلطه للمتذبذب التوافقي

6- حساب القيمه المتوقعه للطاقة الكليه:

بما ان $\Psi_n(x)$ هي داله ذاتيه للمؤثر الهاملتوني فيمكن حساب القيمه المتوقعه للطاقه بسهوله

$$< E >=<\Psi(x,t), H\Psi(x,t) >$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) H\Psi(x,t) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi_0^*(x)e^{iw_0 t/2} + \psi_1^*(x)e^{3iw_0 t/2}\right] H\left[\psi_0(x)e^{-iw_0 t/2} + \psi_1(x)e^{-3iw_0 t/2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi_0^*(x)e^{iw_0 t/2} + \psi_1^*(x)e^{3iw_0 t/2}\right]\left[\frac{\hbar w_0}{2}\psi_0(x)e^{-iw_0 t/2} + \frac{3w_0}{2}\psi_1(x)e^{-3iw_0 t/2}\right]dx$$

$$< E >= \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar w_0}{2} + \frac{3\hbar w_0}{2}\right) = \hbar w_0$$

7- ايجاد القيمه المتوقعه للموقع x في الحاله المختلطه:

$$< x >=<\Psi(x,t), x\Psi(x,t) >$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) x \Psi(x,t) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi_0^*(x) e^{iw_0 t/2} + \psi_1^*(x) e^{3iw_0 t/2} \right] x \left[\psi_0(x) e^{-iw_0 t/2} + \psi_1(x) e^{-3iw_0 t/2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi_0^*(x) x \psi_0(x) + \psi_1^*(x) x \psi_1(x) + \psi_0^*(x) x \psi_1(x) e^{-iw_0 t} + \psi_1^*(x) x \psi_0(x) e^{iw_0 t} \right] dx$$

$$< x > = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cos(w_0 t)$$

8- ايجاد القيمه المتوقعه للزخم p_x في الحاله المختلطه:

$$< p_x > = < \Psi(x,t), p_x \Psi(x,t) >$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \Psi(x,t) dx$$

$$= \frac{\hbar}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \psi_0^*(x) \frac{d}{dx} \psi_0(x) + \psi_1^*(x) \frac{d}{dx} \psi_1(x) \\ \qquad + \psi_0^*(x) \frac{d}{dx} \psi_1(x) e^{-iw_0 t} + \psi_1^*(x) \frac{d}{dx} \psi_0(x) e^{iw_0 t} \end{array} \right] dx$$

اول حدين التكامل عليهما يساوي صفر اما الحدين الاخيره فنربطهما معا وتكون النتيجه

$$< p_x > = -\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\ \hbar\ \sin(w_0 t)$$