المعايره او التطبيع (التقويم)
Normalization

من التفسير الاحصائي لدالة الموجه والذي يقول ان $|\Psi(x,t)|^2$ هي كثافة الاحتمال لايجاد الجسيم عند النقطه x في الزمن t وان التكامل على $|\Psi(x,t)|^2$ يجب ان يكون مساويا للواحد(بمعنى ان يمكن الحصول على الجسيم في مكان ما)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, dx = 1 \qquad .... \qquad (2\text{-}27)$$

بدون هذه العلاقه يعتبر التفسير الاحصائي كلاما فارغا.

سنرى لاحقا ان الداله $\Psi(x,t)$ يتم الحصول عليها من معادلة شرودنجر فاذا كانت الداله حلا فان $A\Psi(x,t)$ يعتبر حلا كذلك وهنا A تمثل ثابت(ربما يكون معقدا). ومهمتنا حساب الثابت A بحيث تتحقق المعادله (2-27) وهذه العمليه تسمى التطبيع او المعايره للداله الموجيه Normalization احيانا بعض حلول معادلة شرودنجر فيها التكامل(المعادله 2-27) يكون غير محدود اي لا يوجد ثابت يجعلها تساوي واحد ونفس الشي يجري على الحل التافه trivial الذي فيه $\Psi = 0$ وان هذا الحل غير القابل للمعايره لا يمثل جسيما ويجب اهماله والحالات المقبوله فيزياويا يجب ان تكون قابله للتكامل.

لنفرض اننا حصلنا على معايره للداله عند الزمن $t = 0$ فماذا يحصل لحلول معادلة شرودنجر بعد مرور الزمن وكيف نتأكد انها تبقى معايره(ولا يمكننا اجراء المعايره عندئذ لان الثابت سيصبح داله للزمن) وبالتالي لا يوجد حل لمعادلة شرودنجر ولحسن الحظ فان معادلة شرودنجر لها خاصية رائعه تحافظ بها تلقائيا على التطبيع(المعايره) للداله الموجيه وبدون هذه الميزه فان معادلة شرودنجر تعتبر غير متوافقه مع التفسير الاحصائي وبذلك تنهار كل النظريه.

وهذا جدا مهم لذلك سنجري البرهان التالي :

نبدأ من

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(x,t)|^2 \, dx \qquad .... \qquad (28\text{-}2)$$

نلاحظ اننا استخدمنا في البدايه المشتقه بالنسبه للزمن $\frac{d}{dt}$ لان ناتج التكامل هو داله الى t فقط بينما

داخل التكامل استخدنا $\frac{\partial}{\partial t}$ لان الداله تحتوي على المتغير x بالاضافه الى t

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) = \Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\Psi + (\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*)\Psi \quad .... \quad (29\text{-}2)$$

معادلة شرودنجر تقول $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x))\Psi$

وبشكل اخر تكتب كالتالي

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{dx^2} - \frac{i}{\hbar}V\Psi \quad .... \quad (30\text{-}2)$$

وباخذ المرافق المعقد للمعادله (2-30)

$$\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{dx^2} + \frac{i}{\hbar}V\Psi^* \quad .... \quad (31\text{-}2)$$

نضرب المعادله(2-30) في Ψ^* من جهة اليسار ونضرب المعادله(2-31) في Ψ من جهة اليمين ونجمع النواتج نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{dx^2} - \frac{\partial^2\Psi^*}{dx^2}\Psi\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Psi^*}{dx}\Psi\right)\right] \quad .... \quad (32\text{-}2)$$

التكامل في المعادله(2-28) يمكن حسابه الان مباشرة وذلك بتعويض المعادله (2-32) في الجانب الايمن من المعادله (2-28)

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Psi^*}{dx}\Psi\right)\right]dx$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Psi^*}{dx}\Psi\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

لكن $\Psi(x,t)$ يجب ان تذهب الى الصفر عندما $x = \pm\infty$ بالاضافه لذلك فان الداله الموجيه ستكون غير معايره لذلك

(33-2) $$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,t)|^2\,dx = 0$$ وهذا معناه ان التكامل مقدار ثابت لا يعتمد على الزمن وبالتالي اذا كانت الداله معايره عند الزمن $t=0$ تبقى معايره لكل الاوقات.

The Uncertainty principle مبدأ اللادقه

لقد كان علينا ان نقبل في عدم وجود مفاهيم تساعدنا على تعلم الميكانيك الكمي وكيف ان الضوء والمادة يسلكان كامواج وجسيمات اعتمادا على نوع التجارب التي يجريها الفيزيائيون المدربون كلاسيكيا ، والاسوء من ذلك هواننا نادرا ما نستطيع ان نحدد التوقعات في الميكانيك الكمي وعلى عكس الميكانيك الكلايبكي فمثلا الزخم الاولي لكرة البيسبول يستخدم للتنبؤ في موقع سقوطها على الارض بالضبط بينما في ميكانيك الكم فان افضل ما نعمله هو احتمالات لكل النتائج الممكنه .

مبدأ اللادقة ليس له علاقه بالاخطاء او قيود القياس ولا ينشأ عن الفشل في الدراسه بشكل كاف وانما هو جزء لايتجزء من الميكانيك الكمي والطبيعه التي نعيش بها.

لو تصورنا ان هناك اف طالب يستطيعون اعداد نظام كمي بحيث يكون كل نظام في نفس الحاله الاوليه تماما(كان يكون النظام ذرة الهيدروجين في وضع الاستقرار) وبعد ذلك يمكن لكل منهما اجراء نفس النوع من القياس على النظام باستخدام افضل المعدات المتاحه عندها ستظل النتنائج ذات اجابات مختلفه التوزيع والشيء الجيد ان توزيع الاجابات المقاسه يشبه توزيع الاحتمالات المحسوبه باستخدام ميكانيك الكم وسيكون متوسط قياس الطلبه قريبا جدا من القيمه المتوقعه التي تنبأ بها الميكانيك الكمي .

تم تقييم بعض هذه النتائج من خلال مبدأ عدم اليقين (اللادقه) لهايزنبرغ والذي يقول(اننا لا نستطيع ان نعرف بدقه موقع الجسيم وزخمه في نفس الوقت) ومن اجل الحصول على شرح لهذه الفكره الغريبه التي مفادها ان عقولنا الكلاسيكيه لا تزال بامكانها فهمها ، اقترح الفيزيائيون منذ فترة طويله ان مبدأ عدم اليقين يعني فقط انه من اجل تحديد موقع الجسيم الكمي بدقه عاليه

يجب علينا ان نتحقق منه بشيء يضفي عليه مثل هذا الزخم الكبير الذي يدمر اي معلومات حول ما كان عليه الزخم قبل ان ننظر اليه ولكن اثبتت التجارب ان مبدأ عدم الدقه يظل قائما حتى عندما نجد طرقا متهوره لتجنب نقل زخم كبير .

(في الميكانيك الكمي نحن نحسب الاحتماليات والمعدل لان مبدأ اللادقه متأصل في الميكانيك الكمي)

نعني بمبدأ عدم الدقه للموقع(او الزخم) للجسيم درجة تشتت الموجه نسبة الى القيمه المركزيه ، مبدأ عدم الدقه لهايزنبرغ اعطى الغايه الصغرى لحاصل ضرب اللادقه في موقع الجسيم وما يقابله من الزخم

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

وكذلك للانظمه المحفوظه ، هناك علاقة لا دقه بين ΔE و Δt

$$\Delta t \, \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

سنحاول اثبات هاتين العلاقتين بعد التعرف على معادلة شرودنجر والمؤثرات.

<u>مثال:</u>

أذا علمت ان طاقة الربط داخل النواة تقدر بحدود($8 \ MeV$) . استخدم مبدأ اللادقة ($\Delta x \, \Delta p \geq \hbar$) لاثبات استحالة وجود الالكترون داخل النواة التي قطرها 10^{-14} متر ؟

لكي يكون الالكترون في داخل النواة فان مقدار التحديد في موضعه لا يزيد عن قطر النوات اي ان

$$\Delta x = 10^{-14} m$$

بما ان $\Delta x \, \Delta p \geq \hbar$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.05x10^{-34}}{10^{-14}} = 1.05x10^{-20} \, kg.ms^{-1}$$

من النسبيه $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$

نهمل $m_0^2c^4$ لانها صغيره جدا قياسا الى الطاقه الحركيه p^2c^2

عليه فان $E = pc$

$$\Delta E = c\,\Delta p$$

$$c\Delta p = 3x10^{8}\,x1.05x10^{-20}$$

$$c\Delta p \approx 20\,MeV = \Delta E$$

وهذه النتيجه اكبر بكثير من طاقة الربط داخل النواة لذلك لا يصح وجود الالكترون داخل النواة.

Schrodinger's Equation **معادلةشرودنجر**

تعرف معادلة شرودنجر بأنها معادلة تفاضلية موجيه(من المرتبهالثانيه) والتي يعطي حلها الداله الموجيه التي تصف سلوك الجسيمات الماديه (الواقعه في مجال جهد ما) .

وللحصول على معادلة شرودنجر يتم الاعتماد على عدة طرق وسوف نناقش واحدا منها الهاملتونين الكلاسيكي

يعرف الهاملتونين في الفيزياء الكلاسيكيه بانه الطاقه الكليه وكلاسيكيا تعرف الطاقه الكليه بانها مجموع الطاقه الحركيه والطاقه الكامنه(طاقةالوضع) وتعطى بالعلاقه التاليه:

$$E = T + U(r) = \frac{1}{2}mV^{2} + U(r)$$

$$E = \frac{P^{2}}{2m} + U(r) \qquad .... \qquad (34\text{-}2)$$

في المعادله (2-34) نحتاج قيمة الطاقه E وكمية الحركه (الزخم) P للجسيم المادي الموصوف بفرضية ديبرولي وهذهالمعلومات من المفترض اننجدها بالداله الموجيه التي تصف الجسيم (المعادلة (A-2))

$$\Psi(x,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \qquad .... \qquad (35\text{-}2)$$

في هذه العلاقه توجد الطاقه الكليه E وكمية التحرك p وعلينا ايجادوسيله رياضيه لاستخراجها منها واحسن السبل الى ذلك هو اشتقاق هذهالمعادله، نفاضل المعادله بالنسبه للموقع مرتين للحصول على كمية التحرك

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar}\Psi$$

ونفاضلها مرة ثانيه نحصل على

$$\frac{\partial^2 \Psi}{dx^2} = (\frac{ip}{\hbar})(\frac{ip}{\hbar})\Psi$$

ومنها نحصل على

$$p^2 = \frac{-\hbar^2}{i}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \qquad .... \qquad (36\text{-}2)$$

وللحصول على الطاقه نفاضل المعادله (2-35) بالنسبة للزمن

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\Psi$$

ومنها نحصل على

$$E = \frac{-\hbar}{i\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \qquad .... \qquad (37\text{-}2)$$

نعوض العلاقتين (2-36) و (2-37) في العلاقه (2-34) نحصل على

$$\frac{-\hbar}{i\Psi}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m\Psi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x)$$

نضرب طرفي المعادله في Ψ ونضرب الجانب الايسر من المعادله في $\frac{i}{i}$ نحصل على

$$i\hbar\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t) \qquad .... \qquad (38\text{-}2)$$

تمثل المعادله (38-2) معادلة شرودنجر العامه وهي معادله تفاضليه من الدرجه الثانيه اشتقت من معادلة الداله الموجيه للجسم المادي ومن المفترض ان حلها يعطي الداله الموجيه (35-2) ويفترض بهذه المعادله ان تعطي وصفا كاملا للجسيم المادي (المجهري) بشكل صحيح وبهذه المعادله وضع شرودنجر الاساس المتين لنظرية الميكانيك الموجي وتعتبر معادلة شرودنجر صيغه غريبه في الفيزياء النظريه وذلك بسبب ظهور الكميه الخياليه i فيها أذ ان معادلة الموجه الكلاسيكيه هي $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ فيها التفاضل الثاني بالنسبه للزمن لا توجد فيها الكميه الخياليه. أن وجود التفاضل الاول للزمن في معادلة شرودنجر يعطي نتيجه مقنعة وهي ان معرفة Ψ في اي لحظه زمنيه يمكن نعرفتها في اي لحظه زمنيه اخرى. يمكن كتابة المعادله (38-2) بلغة الطاقه

$$\hat{E}\ \Psi(x,t) = \hat{H}\ \Psi(x,t) \qquad .... \qquad (39\text{-}2)$$

اذ ان $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ وايضا $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$

نلاحظ من المعادله (38-2) ان الجانب الايسر يعتمد على الزمن فقط والجانب الايمن يعتمد على الموقع اذا لم تكن الداله $U(x)$ معتمده على الزمن وهذا يمكننا من كتابة الداله الموجيه $\Psi(x,t)$ كحاصل ضرب دالتين احدهما تعتمد على الزمن فقط والاخرى تعتمد الموقع فقط وفي هذه الحاله يتحول التفاضل الجزئي الى تفاضل اعتيادي.

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\phi(t) \qquad .... \qquad (40\text{-}2)$$

نعوض العلاقه (40-2) في العلاقه (38-2) نحصل على

$$i\hbar \frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dt} = E$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar}\phi \qquad .... \qquad (41\text{-}2)$$

وايضا نحصل على

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x) \quad .... \quad (42\text{-}2)$$

حل المعادله (2-41) بسيط وهو يساوي

$$\phi(t)=Ce^{-iEt/\hbar} \quad .... \quad (43\text{-}2)$$

يمكن رفع الثابت C وتركه للحل النهائي الخاص بالداله Ψ.

المعادله (2-42) تسمى **<u>معادلة شرودنجر غير المعتمده على الزمن</u>** وهي تمثل حركة جسيم بطاقه كليه E وطاقة كامنه $U(x)$ وكلاهما ثابت لايتغير مع الزمن لذلك فهي تمثل حاله مستقره ولا يمكن حلها الا بمعرفة دالة الجهد (الطاقه الكامنه $U(x)$).

<u>المعنى الفيزيائي للداله الموجيه Physical meaning of the wave function</u>

تعتبر الداله الموجيه $\Psi(x,t)$ مرتبطه بالخصائص الموجيه للجسيمات وما يرتبط بها من كميات قابله للملاحظه والقياس كالطاقه والزخم لذلك من الضروري بمكان ان ترتبط بهذه الداله كل المعلومات المتعلقه بالحاله الفيزيائيه للجسيم الموصوف بهذه الداله فمثلا $\Psi^*\Psi=|\Psi|^2$ تمثل كثافة الاحتمال لوجود جسيم في الحاله الفيزيائيه التي تصفها الداله Ψ ، كذلك حاصل الضرب $|\Psi|dx$ يمثل احتمال وجود الجسم في جزء من الفضاء مقاره dx اي وجود رابطه احصائيه بين الخاصيه الموجيه للجسيمات وخاصيتها الماديه، وهناك تجارب يمكن ان تثبت صحة هذه النظريه مثل الظاهرة الكهروضوئيه وحيود الضوء وكذلك استقطاب الفوتونات فهي تجارب تثبت الصفه المزدوجه للجسيمات.

<u>خواص الداله الموجيه Properties of the wave function</u>

بما ان الداله الموجيه تصف جسيما في الفضاء لذلك يجب ان يكون هذا الجسيم موجودا في نقطه من نقاط هذا الفضاء لذلك

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)\,dx = 1 \qquad .... \qquad (44\text{-}2)$$

$P(x,t)dx$ عباره عن احتمالية وجود جسيم في اللحظة الزمنيه t خلال المدى x و $x+dx$ وان $P(x,t)=\Psi^*\Psi$ لذلك هي كميه حقيقيه ، والعلاقه (2-44) تبين ان مجموع كل الاحتمالات يساوي واحد. أذا حققت الداله العلاقه (2-44) فانها تعتبر داله عياريه وفيما عدا ذلك يقال عنها انها داله غير عياريه ونستطيع تحويلها الى داله عياريه وذلك بضربها بثابت وتحديد قيمته من المعادله (2-44) .

نفرض ان $\Psi(x,t)$ داله غير عباريه والداله $\Psi_0(x,t)$ عياريه لذلك يمكن القول ان $\Psi_0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi(x,t)$ وبالتالي $\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_0(x,t)\Psi_0(x,t)\,dx=1$ وبالتعويض عن $\Psi_0(x,t)$ نحصل على $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi^*(x,t)\frac{1}{\sqrt{N}}\Psi(x,t)\,dx=1$ ومنها نحصل على

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\,dx = N \qquad .... \qquad (45\text{-}2)$$

الثابت N يسمى ثابت المعايره وهولا يعتمد على الزمن اي ثابت بمرور الوقت $\frac{dN}{dt}=0$ ولكي تصح هذه العلاقه يجب ان تكون الداله ومشتقتها تساوي صفر عند النهايات وكذلك التكامل على مربع الداله يجب ان يكون ذا قيمه محدده وانها تعتبر حلا لمعادلة شرودنجر.

ايضا يجب ان تكون الداله الموجيه احادية القيمه اي ان كل قيمه محدده للموضع يقابلها قيمه وحيده للداله الموجيه فقط وهو شرط اساسي لاعطاء احتمال واحد لتواجد الجسيم وكذلك لايمكن للجسيم ان تكون له دالتين في نفس الوقت ومن الخواص الاخرى ان تكون الداله مستمره وكذلك مشتقتها .

كثافة تيار الاحتمال **Probability current density**

من انظريه الكلايكيه وكما نعرف ان تغير كثافة الشحنه يؤدي الى مرور تيار وهناك معادله معروفه بهذا الخصوص وهي $-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial x}$ أذ تمثل ρ كثافة الشحنه وهي تتناقص مع الزمن وهذا واضح من الاشاره السالبه اما s فيمثل التيار الخارج . وعملا بهذه الفكره فان لدينا ما يسمى كثافة الاحتمال $P(x,t)=\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$ وبذلك تجعلنا نفكر بوجود تيار الاحتمال والان سنجد هذا رياضيا ولنبدأ من معادلة شرودنجر المعتمده على الزمن (المعادله (38-2))

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+U(x)\Psi(x,t)$$

ثم ناخذ معادلتها المرافقه

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*(x,t)}{\partial x^2}+U(x)\Psi^*(x,t)$$

نضرب المعادله الاولى في $\Psi^*(x,t)$ والمعادله الثانيه في $\Psi(x,t)$ ونطرح ناتج الثانيه من ناتج الاولى نحصل على

$$i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-(-i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t})=-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-(-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi\frac{\partial^2\Psi^*(x,t)}{\partial x^2})+0$$

$$i\hbar(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t})=-\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-\Psi\frac{\partial^2\Psi^*(x,t)}{\partial x^2})$$

نقسم طرفي المعادله على $i\hbar$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi)=-\frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-\Psi\frac{\partial^2\Psi^*(x,t)}{\partial x^2})$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Psi^*\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}-\Psi\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial x})\right]$$

نلاحظ من المعادله الاخيره ان التيار $j(x,t)$ هو

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[(\Psi^* \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial x})\right] \quad .... \quad (46\text{-}2)$$