نتطرق من خلال هذا الفصل إلى العناصر التالية:

أولا- المتوسط الحسابي

ثانيا- المنوال

ثالثا- الوسيط

رابعا- مشتقات الوسيط

خامسا- مشتقات المتوسط الحسابي

تمارين محلولة وتمارين مقترحة

تمهيد:

لقد لاحظ المحللون للسلاسل الإحصائية حول مواضيع مختلفة أن معظم بيانات السلسلة الإحصائية تتجه أو تنزع إلى التمركز أو التجمع حول قيم متميزة تقع في مركز البيانات والقليل منها تتطرف إما بالكبر وإما بالصغر. نسمي هذه الظاهرة بظاهرة النزعة المركزية. أما القيم التي تتمركز حولها البيانات الأخرى فتسمى مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات، فهي إذن تعين لنا موقع الظاهرة ونستعملها في تقدير مستوى الظاهرة المدروسة.

هناك عدة مقاييس للتعبير عن هذه الظاهرة تختلف من ناحية الدقة والمدلول الإحصائي وطريقة الحساب، من أهمها:

- المتوسط الحسابي ومشتقاته(المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، المتوسط التربيعي).
- الوسيط ومشتقاته(الربيعيات، العشيريات، والمئويات).
- المنوال .

أولا- المتوسط الحسابي $\bar{X}$:

يعتبر المتوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية، ويعرف عموما على أنه مجموع القيم مقسوما على عددها.

1- الطريقة المباشرة:

1-1- المتوسط الحسابي البسيط (غير المرجح):

لتكن السلسلة الإحصائية X_1، $X_2 \ldots\ldots X_i$، ......، X_n ، يحسب $\bar{X}$ كالتالي:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث: X_i تمثل قيم المتغير الإحصائي، و n تمثل عدد القيم.

مثال(3-1):

ليكن لدينا علامات مجموعة من الطلبة في مقياس الإحصاء1:

12، 14، 16، 08، 07، 05، 11، 15، 06، 13.

المطلوب: حساب متوسط علامات الطلبة؟.

الحــــــل: $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{n} = \frac{12+14+16+08+07+05+11+15+06+13}{10} = \frac{107}{10} = 10{,}7$$

متوسط علامات الطلبة في مقياس الإحصاء1 هو 10,7.

1-2- المتوسط الحسابي المرجح:

إذا كانت لدينا بيانات مبوبة أي في شكل توزيع تكراري فإن:

$$\bar{X} = \frac{n_1X_1 + n_2X_2 + \cdots + n_kX_k}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_iX_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \dots\dots\dots\dots (2)$$

حيث: X_i تمثل قيم المتغير الإحصائي المتقطع، و n_i تمثل التكرارات المطلقة الموافقة لها و n تمثل مجموع التكرارات.

ملاحظات:

- نسمي $\bar{X}$ في الصيغة (2) بالمتوسط الحسابي المرجح، لأننا نرجح كل قيمة X_i في الجدول بتكرارها المطلق n_i أو تكرارها النسبي f_i.

- نلاحظ من الصيغة (2) أن $f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$ وبالتعويض في الصيغة نفسها نجد:

$$\bar{X} = f_1X_1 + f_2X_2 + \cdots + f_kX_K = \sum_{i=1}^{k} f_iX_i \dots\dots\dots\dots (3)$$

مثال(2-3): البيانات التالية تمثل عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 50 مسكن ببلدية سطيف.

الجدول(1-3): توزيع عينة من 50 مسكن ببلدية سطيف حسب عدد الغرف في المسكن الواحد

عدد الغرف (قيم المتغير X_i)	عدد المساكن (التكرار) n_i	n_iX_i	التكرار النسبي f_i	f_iX_i
1	1	1	0,02	0,02
2	8	16	0,16	0,32
3	13	39	0,26	0,78
4	13	52	0,26	1,04
5	6	30	0,12	0,60
6	4	24	0,08	0,48
7	3	21	0,06	0,42
8	2	16	0,04	0,32
المجموع	$\sum n_i = 50$	199	1	3,98

المطلوب: حساب متوسط عدد الغرف في المسكن الواحد؟

الحـــــل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_iX_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{8} n_iX_i}{50} = \frac{199}{50} = 3,98$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_iX_i = \sum_{i=1}^{8} f_iX_i = 3,98$$

متوسط عدد الغرف في المسكن الواحد هو 3,98.

2- الطريقة غير المباشرة:

عندما تكون لدينا بيانات كبيرة القيم فإننا نستخدم طريقة غير مباشرة في حساب المتوسط الحسابي (طريقة

الانحراف عن متوسط فرضي)، الغرض منها هو تصغير قيم البيانات من أجل تسهيل عملية حساب المتوسط الحسابي.

2-1- المتوسط الحسابي البسيط:

إذا كانت لدينا بيانات غير مبوبة أي في شكل سلسلة إحصائية، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- نفرض قيمة ثابتة a تكون قريبة من القيم الأصلية وتتوسطها (نسميها متوسط فرضي)؛

ب- حساب الانحرافات d_i بين قيم السلسلة والمتوسط الفرضي: $d_i = X_i - a$؛

ج- حساب المتوسط الحسابي للقيم الجديدة: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$؛

د- حساب المتوسط الحسابي الأصلي حيث لدينا: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (X_i - a)}{n} = \frac{\sum X_i - \sum a}{n} = \frac{\sum X_i}{n} - \frac{na}{n}$

$$\bar{d} = \bar{X} - a \Rightarrow \boxed{\bar{X} = \bar{d} + a}$$

مثال(3-3):

لتكن لدينا القيم التالية: 12، 10، 15، 8، 5. أحسب الوسط الحسابي عن طريق انحرافات القيم عن وسط فرضي.

الحل: نفرض أن $a = 9$، وعليه نحسب الانحرافات وفق الصيغة التالية: $d_i = X_i - a$، فيتتج لدينا:

$d_i = X_i - a$	X_i
-4	5
-1	8
1	10
3	12
6	15
5	**المجموع**

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\bar{X} = \bar{d} + a = 1 + 9 = 10$$

كما أننا نحصل على نفس النتيجة بتطبيق العلاقة:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{n} = \frac{50}{5} = 10$$

2-2- المتوسط الحسابي المرجح:

إذا كانت لدينا بيانات مبوبة أي في شكل توزيع تكراري فإننا نتبع نفس الخطوات السابقة ولكن بوضع:

$$\boxed{\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i n_i}{\sum n_i}}$$

كما أن:

$$\boxed{\bar{X} = \bar{d} + a}$$

مثال(3-4): أحسب المتوسط الحسابي بطريقة الانحراف عن متوسط فرضي نفترض أنه $a = 800$؟

X_i	500	700	800	850	900	1000	المجموع
n_i	10	16	02	18	16	10	**72**

الحل:

X_i	n_i	$d_i = x_i - 800$	$d_i\, n_i$
500	10	−300	−3000
700	16	−100	−1600
800	02	0	0
850	18	50	900
900	16	100	1600
1000	10	200	2000
المجموع	**72**	/	**−100**

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i d_i}{\sum n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i d_i}{72} = \frac{-100}{72} = -1{,}39$$

حساب المتوسط الحسابي الأصلي: $\bar{X} = \bar{d} + a = -1{,}39 + 800 = 798{,}61$

إذن المتوسط الحسابي لهذه البيانات: 798,61.

ملاحظة: إذا كان المتغير الإحصائي مستمر فإننا نعوض X_i بمراكز الفئات $\mathbf{C_i}$ في كل المعادلات السابقة أي:

$$\bar{X} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \cdots + n_k c_k}{\sum n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i}{\sum n_i}$$

$$\bar{X} = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \cdots + f_k c_K = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i$$

$\bar{X} = \bar{d} + a$ حيث $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i n_i}{\sum n_i}$ و $d_i = c_i - a$

مثال(3−5): البيانات التالية تمثل أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـــ: LMD بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة سطيف،و المطلوب حساب متوسط أوزان الطلبة؟

الجدول(3−2): أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـ: LMD بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة سطيف

أوزان الطلبة X_i	عدد الطلبة n_i
]55 − 50]	2
]60 − 55]	5
]65 − 60]	12
]70 − 65]	16
]75 − 70]	14
]80 − 75]	8
]85 − 80]	3
المجموع	**60**

الحل:

أوزان الطلبة X_i	عدد الطلبة n_i	C_i	$X_i n_i$
$]55-50]$	2	52,5	105
$]60-55]$	5	57,5	287,5
$]65-60]$	12	62,5	750
$]70-65]$	16	67,5	1080
$]75-70]$	14	72,5	1015
$]80-75]$	8	77,5	620
$]85-80]$	3	82,5	247,5
المجموع	60	/	4105

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i c_i}{\sum n_i} = \frac{4105}{60} = 68{,}42$ ، ومنه فإن متوسط أوزان الطلبة هو 68,42 كلغ.

3- خصائص المتوسط الحسابي:

أ- يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة.

مثلا: تتكون أسرة من 5 أفراد، تبلغ أعمارهم على الترتيب: 55، 49، 13، 11، 10.

المتوسط الحسابي هو: $\bar{X} = \frac{55+49+13+11+10}{5} = \frac{138}{5} = 27{,}6$

نلاحظ أن النتيجة المحصل عليها لا تمثل أي قيمة من القيم المدروسة، وبالتالي نستنتج أنه لا يمكن استعمال المتوسط الحسابي في مثل هذه الحالات، لأنه من المفروض أن تكون قيم المتغير الإحصائي متمركزة حول النتيجة المحصل عليها.

ب- يستعمل المتوسط الحسابي في حالة المتغيرات الكمية أي القابلة للقياس.

ج- لا يمكن حساب المتوسط الحسابي في حالة البيانات المفتوحة (أقل من، أكثر من).

د- مجموع انحرافات القيم عن متوسطها يساوي دائما الصفر. $\boxed{\sum(X_i - \bar{X}) = 0}$

$$\sum(X_i - \bar{X}) = \sum X_i - \sum \bar{X}$$
$$\sum(X_i - \bar{X}) = \sum X_i - n\bar{X} = n\bar{X} - n\bar{X} = 0$$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي يقع في مركز البيانات.

هـ- مجموع مربع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات انحراف نفس القيم عن أي قيمة أخرى، أي: $\boxed{\sum(X_i - \bar{X})^2 < \sum(X_i - X_\alpha)^2}$ حيث: $\bar{X} \neq X_\alpha$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي أقرب إلى البيانات X_i من أي قيمة أخرى.

مثلا: إذا كانت لدينا القيم التالية: 24، 8، 6، 16، 14، 4، أثبت صحة الخاصيتين د ، هـ؟