البرهان: نفرض ان

$$\therefore x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge x \in \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$$
$$\rightarrow (\exists t \in I \rightarrow x \in A_t) \wedge (\exists r \in J \rightarrow x \in B_r)$$

$$\rightarrow \exists (t,r) \in I \times J \ \rightarrow x \in A_t \cap B_r \rightarrow x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} \left(A_i \cap B_j\right)$$

$$\therefore \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \subseteq \bigcup_{(i,j)\in I\times J} \left(A_i \cap B_j\right) \ldots\ldots (1$$

وبنفس الطريقة نعمل للاتجاه الاخر ، فنفرض ان

$$y \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} \left(A_i \cap B_j\right) \rightarrow \exists (k,h) \in I \times J \ \rightarrow y \in (A_k \cap B_h)$$

$$(\exists k \in I \wedge h \in J \rightarrow y \in A_t \wedge y \in B_h)$$
$$\rightarrow (\exists k \in I \rightarrow y \in A_k) \wedge (\exists h \in J \rightarrow y \in B_h)$$

$$\therefore y \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge x \in \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \rightarrow y \in \left[\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\right]$$

$$\therefore \bigcup_{(i,j)\in I\times J} \left(A_i \cap B_j\right) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \ldots\ldots (2$$

من و1) و2) فان

$$\therefore \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} \left(A_i \cap B_j\right)$$

الفصل الثاني

العلاقات والتطبيقات (الدوال): Relation and Mappings (Fundions)

تعريف الزوج المرتب: ان الزوج المرتب (a,b) يمكن التعبير عنه بالشكل التالي:

$$(a,b) = \{a,\{a,b\}\}$$

ملاحظة:

١) اذا كانت $(a,b) = (c,d)$ اي ان $\{a,\{a,b\}\} = \{c,\{c,d\}\}$ فان $b =$ d و $a = c$

٢) اذا كان $a \neq b$ في (a,b) فان $\{a,\{a,b\}\} \neq \{b,\{a,b\}\}$

٣) اذا كان (a,b) فان a يسمى المسقط الاول و b يسمى المسقط الثاني للزوج المرتب (a,b)

٤) ان (a,b,c) يسمى ثلاثي مرتب اي ان $(a,b)=(a,b),c)$ وان $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ يسمى النوني المرتب والذي يحتوي n من العناصر المرتبة والذي يعرف كالاتي

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)=(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),a_n)$$

حاصل ضرب المجموعات (الضرب الديكارتي): Cartesian Product

لتكن كل من A,B مجموعة ، فان حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B هو مجموعة عناصرها جميع الازواج المرتبة (a,b) حيث ان $a\in A$ و $b\in B$ ويرمز $A\times B$ ، اي ان

$$A\times B=\{(a,b):a\in A\,,b\in B\}$$

مثال (١) :

اذا كانت $A=\{a,b\},B=\{1,2,3\}$ فان

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

$$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

واضح ان $A\times B\neq B\times A$

مثال (٢):

لتكن A=R ، فان $R\times R=\{(x,y):x,y\ \in R\}$ اي ان $R\times R$ مجموعة عناصرها جميع نقاط المستوي .

ملاحظة:

١. اذا كانت A مجموعة تحتوي على n من العناصر وB مجموعة تحتوي على m من من العناصر فان $A\times B$ مجموعة تحتوي nm من العناصر وكذلك $B\times A$.
٢. اذا كانت A او B مجموعة غير منتهية فان $A\times B$ مجموعة غير منتهية ايضا.
٣. اذا كانت A او B مجموعة خالية فان $A\times B$ مجموعة خالية ايضا.
٤. اذا كانت A او B مجموعة غير خالية فان

$$A\times B=B\times A\leftrightarrow A=B$$

مبرهنة (١-٢): اذا كانت كل من A,B,C,D فان:

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

البرهان :

١) نفرض $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$$\to x \in A \wedge y \in (B \cap C) \to \ x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$$

$$\to (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in B) \to (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C$$

$$\to A \times (B \cap C) \subseteq [(A \times B) \cap (A \times C)] \ldots . (1)$$

وبالاتجاه الاخر ، نفرض

$$(a, b) \in [(A \times B) \cap (A \times C)] \to (a, b) \in (A \times B) \wedge (a, b) \in (A \times C)$$

$$\to a \in A \wedge (b \in B \wedge b \in C) \to a \in A \wedge b \in (B \wedge C) \to (a, b) \in A \times (B \cap C)$$

$$\to [(A \times B) \cap (A \times C)] \subseteq A \times (B \cap C) \ldots . (2)$$

من (1) و (2) ينتج :

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

٣) نفرض ان

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (C \times D)$$

$$\leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \leftrightarrow x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D)$$

$$\leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$\therefore (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

س / اثبت ان $(A \times B) - (A \times C) = A \times (B - C)$؟

تعريف : اذا كانت كل من A,B,C مجموعة فان حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات الثلاثة هو مجموعة عناصرها كافة الثلاثيات المرتبة (a, b, c) حيث $a \in A, b \in B, c \in C$ ويرمز لها $A \times B \times C$ اي ان :

$$A \times B \times C = \{(a,b,c): a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

وبشكل عام يكون لدينا:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n): a_i \in A_i\}$$

هو مجموعة عناصرها كافة $A_1, A_2 \ldots, A_n$ وان اصل الضرب الديكارتي للمجموعات وان: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ حيث $a_i \in A_i, \forall 1 \le i \le n$ النونيات المرتبة

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

مثال: اذا كانت $A_1 = R, \forall 1 \le i \le n$ فان:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n): a_i \in A_i \forall 1 \le i \le n\} = R^n$$

العلاقات الثنائية:Binary Relation

اذا كانت كل من A,B مجموعة ولتكن $P(x,y)$ جملة مفتوحة في x,y معرفة على حاصل الضرب الديكارتي $(A \times B)$. ان الثلاثي $(P(x,y), A, B)$ يسمى علاقة من A الى B ومجموعة الصدق الى $P(x,y)$ تسمى ببيان العلاقة Graph ويرمز له بالرمز G ، اي ان: $G = \{(x,y): A \times B:$ صادقة $P(x,y)\}$.

ملاحظة:

١. ان G هي مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$.
٢. اذا اعتبرنا R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فان $R \subseteq A \times B$ وسنعبر عن العلاقة R باعتبارها مجموعة بواحدة من الطريقتين ، اما بكتابة عناصرها كازواج مرتبة او كتابتها بذكر الصفة المميزة لعناصرها وكما في الشكل التالي

$$R = \{(x,y): x \in A, y \in B \ , P(x,y)\}$$

٣. اذا كانت $(x,y) \in R$ فهذا يعني ان xRy [x يرتبط مع y بالعلاقة R].
٤. في حالة $A = B$ فان R تسمى علاقة على A وعندها $R \subseteq A \times A$.

مثال:

١) اذا كانت $A = \{2,4,7\}, B = \{1,5\}$ فان المجموعة $R = \{(x, y): x > y\}$ هي علاقة من A الى B ونلاحظ ان

$$R = \{(4,1), (7,1), (7,5), (2,1)\}$$

٢) ان المجموعة

$D = \{(x, y) \in R \times R;\ x^2 + y^2 = 1\}$علاقة معرفة على R.

٢) جميع العمليات على المجموعات تجري على R (العلاقة) باعتبارها ايضا مجموعة، فمثلا اذا كان منQ,R علاقة من A الى B فان:

$$R \cup Q = \{(x, y) \in A \times B: (x, y) \in R \vee (x, y) \in Q\}$$

$$R \cap Q = \{(x, y) \in A \times B: (x, y) \in R \wedge (x, y) \in Q\}$$

$$R - Q = \{(x, y) \in A \times B: (x, y) \in R \wedge (x, y) \in Q^c\}$$

٣) اذا كانت $R = \{(x, y) \in A \times A;\ x + y = 4\}$ وان $Q = \{(x, y) \in A \times A; 2\,x - y = 2\}$ وان $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ فان

$$A \times A = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,0), (1,1), \dots.\}$$

$$R = \{(0,4), (4,0), (1,3), (3,1), (2,2)\} \quad , \quad Q = \{(2,0), (2,2), (3,4)\}.$$

$$\rightarrow \quad Q - R \quad , \qquad R - Q \quad , \qquad R \cup Q \quad , \quad R \cap Q = \{(2,2)\}$$

<u>تعريف :</u> لتكن A مجموعة ما ، فالعلاقة الذاتية (Identity Relation) على المجموعة A ويرمز لها ب I_A وهي المجموعة التي عناصرها جميع الازواج المرتبة (x, y)في $A \times A$ حيث ان $x = y$ اي ان $I_A = \{(x, y): x \in A, y \in B \rightarrow x = y\ \}$

مثال :

١) اذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$ فان $I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.

٢) اذا كانت $A = Z_o$ فان العلاقة الذاتية المعرفة على A هي$I_A = \{(x, y) \in Z_o \times Z_o: x = y\ \} = \{(1,1), (2,2), \dots.\}$.

تعريف : لتكن R علاقة من المجموعة A الى B فالعلاقة من B الى A والتي عناصرها هي جميع الازواج المرتبة (y,x) حيث $(x, y) \in R$

علاقة عكسية (Inverse Relation) ويرمز لها ب R^{-1} اي ان $R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\} \subseteq B \times A$.

ملاحظة : $(x,y)\in R \leftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$

مبرهنة (٢-٢): لتكن R علاقة على A فان $R=(R^{-1})^{-1}$.

مثال:

1) اذا كان $A=\{(a,b,c)\}, B=\{1,2\}$: فان

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

هي علاقة من A الى B وان $R=\{(a,1),(b,2),(c,1)\}$ فان $R^{-1}=$ $\{(1,a),(2,b),(1,c)\}$ هي معكوس العلاقة R.

٢) اذا كانت Q علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية N كالاتي :

فان $Q=\{(x,y)\in N\times N: x=0\}=\{(0,0),(0,1),(0,2),\dots\}$:

$$Q^{-1}=\{(x,y)\in N\times N: y=0\}=\{(0,0),(1,0),(2,0),\dots\}.$$

٣) لتكن W علاقة معرفة على R كالاتي:

$$W=\{(x,y)\in R\times R: y=x^2\}\rightarrow W^{-1}=\{(x,y)\in R\times R: x=y^2\}.$$

تعريف : لتكن R علاقة من المجموعة A الى B ، فنعرف منطلق العلاقة R (Domain) بانها مجموعة العناصر الاولى من الاوزاج المرتبة في R ويرمز لها ب dom R . اي ان $dom\ R=\{x:\exists y\in B\rightarrow (x,y)\in R\}$.

ونعرف مدى العلاقة R(Range) بانها مجموعة العناصر الثانية من الازواج المرتبة (x,y) في R ويرمز لها ring R اي ان

$$ring\ R=\{y:\exists x\in A\rightarrow (x,y)\in R\}.$$

ملاحظة: $dom\ R\subseteq A$ و ring R$\subseteq B$.

مثال :

١) اذا كانت $A=\{2,4,6\}, B=\{a,b\}$ وان R علاقة من المجموعة A الى B معرفة ب $R=\{(2,a),(2,b),(4,b)\}$ فان

$$dom\ R=\{2,2,4\}=\{2,4\}, ran\ R=\{a,b,b\}=\{a,b\}.$$

٢) اذا كانت Q علاقة على R معرفة كالاتي$Q=\{(x,y)\in R\times R: y=x^2\}$ فان

$$dom\ R=\{x:\exists y\in R\to(x,y)\in Q\}=\{x:\exists y\in R\to y=x^2+1\}$$
$$=\mathrm{R}$$

$$ring\ R=\{y:\exists x\in R\to(x,y)\in Ry=x^2+1\}=\{y:y\geq 1\}$$

مبرهنة (٣-٢): اذا كانت R علاقة من المجموعة A الى B فان

1) $ranR^{-1}=\ dom\ R$ 2) $ran\ R$=$dom\ R^{-1}$

البرهان: ١) نفرض ان $x\in dom\ R$ فيكون

$$x\in dom\ R\to\exists y\in B;(x,y)\in R\to\exists y\in B;(x,y)\in R^{-1}\to x \in ranR^{-1}$$

$$\therefore dom\ R\subseteq ran\ R^{-1}\ \ldots..(1)$$

وبالاتجاه الاخر ، نفرض $a\in ran\ R^{-1}$ ، فيكون:

$$\to\exists b\in B;(a,b)\in R^{-1}\to\exists b\in B;(x,y)\in R\to x\in dom\ R$$

$$\therefore ran\ R^{-1}\subseteq dom\ R\ \ldots..(2)$$

من (١) و (٢) نحصل على $ran\ R^{-1}=dom\ R$

تعريف : اذا كانت R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B وكذلك لدينا $D\subseteq B$, $C\subseteq A$ فان المجموعة $R\cap(C\times D)$ تسمى ب

(بقصر العلاقة R) Restriction من C الى D. وفي حالة C=D, A=B فان R تكون علاقة على A $R\cap(C\times C)$ تسمى في هذه الحالة ب بقصر العلاقة R على C ويرمز لها بالرمز R/C .

Composition of Relations: تركيب العلاقات

تعريف : اذا كانت R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B ، وان اذا كانت S علاقة من المجموعة B الى المجموعة C فان SoR تسمى تركيب العلاقة R مع S ، وتعرف ب

$$SoR=\{(x,z)\in A\times C:\exists y\in B\ni(x,y)\in R,(y,z)\in S\}.$$

مبرهنة (٤-٢) : لتكن R علاقة على المجموعة A فان: $I_AoR=RoI_A=R$:

البرهان : نبرهن اولا ان: $I_AoR=R$:

$$(x,y) \in I_A oR \to \exists z \in A \ni (x,z) \in R, (z,y) \in I_A$$

وبما ان

$$(z,y) \in I_A \to z = y \to (x,y) \in R \to \quad I_A oR \subseteq R \ldots\ldots (1)$$

والان نفرض ان

$$(x,y) \in R, (y,y) \in I_A \to (x,y) \in I_A oR \to R \subseteq I_A oR \ldots\ldots (2)$$

من ١ و(٢) نحصل على: $I_A oR = R$.

وبالطريقة نفسها نبرهن ان $RoI_A = R$.

مبرهنة (٥-٢): لتكن $T,S.R$ علاقات على المجموعة A فان:

1) $(ToS)oR = To(SoR)$; 2) $(S \cup T)oR = (SoR) \cup (ToR)$;

3) $(S \cap T)oR = (SoR) \cap (ToR)$; 4) $R \subseteq S \to ToR \subseteq ToS$ and $RoT \subseteq SoT$;

5) $(SoR) \cap T \neq \emptyset \leftrightarrow (ToR^{-1}) \cap S \neq \emptyset$; 6) $(SoR)^{-1} = R^{-1}oS^{-1}$.

البرهان: 1) نفرض ان $(x,t) \in (ToS)oR$

$$\to [\exists y \ni (x,y) \in R \wedge (y,t) \in ToS] \wedge [\exists z \ni (y,z) \in S \wedge (z,t) \in T]$$

$$(x,y) \in R \wedge (y,Z) \in S \to (x,z) \in SoR \wedge (z,t) \in T \to (x,t) \in To(SoR)$$

$$\therefore (ToS)oR \subseteq To(SoR) \ldots\ldots (1)$$

وبنفس الطريقة نحصل على $To(SoR) \subseteq (ToS)oR \ldots\ldots (2)$

من (١) و (٢) نحصل على $(ToS)oR = To(SoR)$.

5) افرض ان $(SoR) \cap T = \emptyset$

$$\exists (x,y) \in (SoR) \cap T \to (x,y) \in (SoR) \wedge (x,y) \in T$$

$$(x,y) \in (SoR) \to \exists z \ni (x,z) \wedge \in R (z,y) \in S$$

$$but\ (x,z) \in R \to (z,x) \in R^{-1}$$

$(z,x) \in R^{-1}(x,y) \in T \rightarrow (z,y) \in ToR^{-1} \quad [but\ (z,y) \in S] \rightarrow (z,y) \in ToR^{-1} \cap S$

اي ان $(SoR) \cap T \neq \emptyset$.

وبنفس الطريقة نبرهن $\quad (ToR^{-1}) \cap S \neq \emptyset \rightarrow (ToR^{-1}) \cap T \neq \emptyset;$

$$\therefore (SoR) \cap T \neq \emptyset \leftrightarrow (ToR^{-1}) \cap S \neq \emptyset.$$

مثال : لتكن $A = \{a,b,c\}, B = \{d,e,f,j\}, C = \{k,l\}$ ولتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B معرفة بالشكل

$$R = \{(a,b),(a,c),(b,d)\}$$

ولتكن S علاقة من المجموعة B الى المجموعة C معرفة بالشكل $S = \{(d,l),(e,k)\}$ فان

$SoR = \{(a,l),(a,k)\}$ وهي علاقة من A الى C .

وكذلك نلاحظ ان $SoW = \{(a,l)\}$ و $W \subseteq R$ واذا كانت $W = \{(a,d),(b,f)\} \rightarrow$
$SoW \subseteq SoR.$

انواع العلاقات :

تعريف : لتكن R علاقة على المجموعة A فان R:

١. تسمى علاقة انعكاسية $Reflexive$ اذا كانت $\forall x \in A; (x,x) \in R$.

[العلاقة الذاتية $I_A \subseteq R$ حيث R علاقة انعكاسية].

٢. تسمى علاقة متناظرة $Symmetric$ اذا كانت $\forall x,y \in A; (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$.

٣. تسمى علاقة متعدية $Transition$ اذا كانت $\forall x,y,z \in A; (x,y) \in R, (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$.

٤. تسمى علاقة متخالفة(ضد متناظرة) $Anti\text{-}Symmetric$ اذا كانت $\forall x,y \in A; (x,y) \in R, (y,x) \in R \rightarrow x = y$.

ملاحظة : العبارة { *العلاقة* R *ليست متناظرة* }*لا تعني ان* R *علاقة ضد متناظرة.*

مبرهنة(٦-٢) : لتكن R علاقة على المجموعة A فان R علاقة متناظرة على A اذا وفقط اذا كان $R = R^{-1}$.

البرهان : نفرض ان R علاقة متناظرة على A ومنه

$$(x,y) \in R \to (y,x) \in R \leftrightarrow (y,x) \in R^{-1} \to R = R^{-1}$$

وبصورة معاكسة اذا فرضنا $R = R^{-1}$ فنفرض ان $(x,y) \in R$

$$(x,y) \in R \to (x,y) \in R^{-1} \to (y,x) \in R$$

نحصل R علاقة متناظرة.

امثلة : اذكر انواع العلاقات التالية:

١. $R = \{(x,y) \in N \times N : x < y\}$ علاقة ليست انعكاسية و ليست متناظرة وليست متعدية وتكون علاقة تخالفية .
٢. $R = \{(x,y) \in N \times N : x \leq y\}$ علاقة انعكاسية وليست متناظرة و متعدية.
٣. $R = \{(x,y) \in N \times N : y \neq 0, y$ لا يقبل القسمة على $x\}$.
٤. R علاقة معرفة على مجموعة الاجزاء $P(x)$ كالتالي :

$$R_1 = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) : A \leq B\}$$

$$R_2 = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) : A \cap B = \emptyset\}$$

العلاقة R_1 انعكاسية و ليست متناظرة و متعدية.

العلاقة R_2 ليست انعكاسية و متناظرة وليست متعدية.

٥. $R = \{(x,y) \in A \times A : x + y = 6\}$ علاقة ليست انعكاسية و متناظرة و ضد المتناظرة (تخالفية).

مثال : لتكن كل من S,T علاقة متناظرة على مجموعة ما ، برهن على ان العلاقة $S \cap T$ هي علاقة متناظرة

البرهان : $H.W$ ، صفحة ١٨٥

مثال : لتكن $A = \{1,2,3,4,\}$ ولتكن R علاقة معرفة على A كالاتي :

$$R = \{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2)\}$$

غير انعكاسية و غير متناظرة وغير متعدية وغير تخالفية .

<u>مبرهنة (٧-٢):</u> لتكن R علاقة معرفة على فان R علاقة ضد متناظرة اذا وفقط اذا كان $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

البرهان : $\Longleftarrow$ نفرض ان R علاقة ضد متناظرة وان $(x,y) \in R \cap R^{-1}$

$(x,y) \in R, (x,y) \in R^{-1} \to (x,y) \in R, (y,x) \in R \to x = y$(لان ضد متناظرة)

$(x,y) \in I_A \to R \cap R^{-1} \subseteq I_A \ldots\ldots (1)$

الان نفرض ان $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ ونبرهن R علاقة ضد متناظرة . نفرض ان

$(x,y) \in R, (y,x) \in R \to (x,y) \in R, (x,y) \in R^{-1} \to (x,y) \in R \cap R^{-1}$

ومن (١) ينتج ان $(x,y) \in I_A$ ← $x = y$ (حسب تعريف العلاقة الذاتية) ← R علاقة ضد متناظرة.

ت.٣-٣ صفحة ١٩١

علاقات التكافؤ (Equivalence Relation):

تعريف : لتكن R علاقة على المجموعة A، فان R تسمى علاقة تكافؤ اذا كانت :

(أ) علاقة انعكاسية (ب) علاقة متناظرة (ج) علاقة متعدية

مثال: اي من العلاقات التالية تمثل علاقة تكافؤ: حيث ان R معرفة على R

١) $R = \{(x,y) \in R \times R : x = y\}$
ان R علاقة تكافؤ وذلك لان :
أ- $\forall x \in R, x = x$ انعكاسية اي ان $\forall x \in R, (x,x) \in R$
ب- $x = y \to y = x$ ، اي ان $(x,y) \in R \to (y,x) \in R$.
ت- $x = y, y = z \to x = z$ اي ان $(x,y) \in R, (y,z) \in R \to (y,z) \in R$.

٢) $R = \{(x,y) \in R \times R : x < y\}$ علاقة تكافؤ لانها علاقة ا) انعكاسية (ب) علاقة متناظرة (ج) علاقة متعدية

٣) Q علاقة معرفة على P(x) كالاتي $Q = \{(A,B) \in P(x) \times P(x) : A \subseteq B\}$.

٤) W علاقة معرفة على P(x) كالاتي $W = \{(A,B) \in P(x) \times P(x) : A = B\}$.

فان Q علاقة تكافؤ وذلك لانها تحقق

أ- $\forall A \in P(x), A = A$ اي ان A∈P(x),(A,A)∈Q∀. انعكاسية
ب- $A = B \to B = A$ اي ان $(A,B) \in Q \to (B,A) \in Q$. متناظرة
ت- $A = B, B = C \to A = C$ اي ان $(A,B) \in Q, (B,C) \in Q \to (B,C) \in Q$. متعدية

اما W فهي ليست علاقة تكافؤ لكونها علاقة غير متناظرة،

٥) اذا كانت A تمثل حاصل الضرب الديكارتي الى مجموعة الاعداد الحقيقية R ولتكن معرفة على A كالتالي:

$$R = \{(a,b),(c,d) \in (R \times R) \times (R \times R): a+b = c+d\}$$

فان R تكون علاقة تكافؤ على A كما يلي :ص١٩٧

مبرهنة (٢-٨): اذا كانت كل من S,T علاقة تكافؤ على المجموعة A فان $S \cap T$ علاقة تكافؤ على A .

البرهان : بما S ∧ T علاقة تكافؤ على المجموعة A فان كلا من S∧T علاقة انعكاسية على Aفأذن

$\forall x \in A, (x,x) \in S \wedge (x,x) \in T \rightarrow (x,y) \in S \cap T \rightarrow S \cap T$ علاقة انعكاسية

نفرض $(x,y) \in S \cap T$ فان $(x,y) \in S \wedge (x,y) \in T$

ولكن S ∧T علاقة متناظرة اذن $(y,x) \in S \wedge (y,x) \in T$ اي ان $(y,x) \in S \cap T$ وعليه فان $S \cap T$ علاقة تناظرية.

واخيرا نفرض $(x,y) \in S \cap T \wedge (y,z) \in S \cap T$

$$\big((x,y) \in S \wedge (x,y) \in T\big) \wedge \big((y,z) \in S \wedge (y,z) \in T\big)$$
$$\rightarrow \big((x,y) \in S \wedge (y,z) \in S\big) \wedge \big((y,z) \in T \wedge (x,y) \in T\big)$$

وبما ان S ∧T علاقة متعدية اذن $(x,z) \in S \wedge (x,z) \in T$ اي ان $(x,z) \in S \cap T$. فان $S \cap T$ علاقة متعدية.

اذن $S \cap T$ علاقة تكافؤ.

مبرهنة (٢-٩):

اذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A فان $RoR = R$.

البرهان : نفرض $(x,z) \in RoR$

$$\rightarrow \exists y \in A \ni (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$$

بما ان R علاقة متعدية ← $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$ وعليه يكون $RoR \subseteq R \ldots\ldots (1)$

الان نفرض $(x,y) \in R$ وبما ان R علاقة انعكاسية ← $(x,x) \in R$ اي ان

ومن تعريف تركيب العلاقة نحصل على $\exists x \in A \ni (x,x) \in R \wedge (x,y) \in R$

$$(x,y) \in RoR \rightarrow R \subseteq RoR \ldots\ldots (2)$$

من (١) و (٢) نحصل على $RoR = R$.

تعريف : لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة $A \neq \emptyset$ وليكن $a \in A$ فالمجموعة التي عناصرها جميع العناصر في A والتي ترتبط مع العنصر a بالعلاقة R تسمى ب (صف التكافؤ) المحتوي على a ويرمز لها ب $[a]$ او A_a اي ان

$$[a] = \{x \in A : (x,a) \in R\}.$$

مثال : (١) لتكن $A = \{1,23,,4,5\}$ وان R علاقة معرفة على A كالاتي :

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,4),(4,1)\}$$

واضح ان R علاقة تكافؤ على A وصفوف التكافؤ هي

$$[1] = \{x \in A : (x,1) \in R\} = \{1,4\} \quad ; \quad [2] = \{x \in A : (x,2) \in R\} = \{2\};$$

$$[3] = \{x \in A : (x,3) \in R\} = \{3\} \quad ; \quad [4] = \{x \in A : (x,a) \in R\}$$
$$= \{1,4\} \ ; \ [5] = \{x \in A : (x,5) \in R\} = \{5\}.$$

وبما ان $[4] = [1]$ فان صفوف التكافؤ هي $\{[1],[2],[3],[5]\}$.

مبرهنة (١٠-٢): لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة $A \neq \emptyset$ وليكن $a,b \in A$ فان:

$$1)\ a \in [a] \ ; \quad 2) if\ b \in [a] \rightarrow [a] = [b]\ ; \quad 3)[a] = [b] \leftrightarrow (a,b) \in R$$

$$4)\ if\ [a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow [a] = [b].$$

البرهان : 1) بما ان R علاقة انعكاسية فيكون $\forall a \in A$ $(x,y) \in R$ اذن $a \in [a]$ (من التعريف)

2) نفرض ان $x \in [b] \leftarrow (x,b) \in R$ وبما ان $(b,a) \in R \rightarrow x \in [a]$ (حسب تعريف صف التكافؤ).

$$\therefore [b] \subseteq [a] \ldots\ldots (1)$$

والان نبرهن $[a] \subseteq [b]$ فنفرض ان $y \in [a] \leftarrow (y,a) \in R$ وبما ان $(b,a) \in R \rightarrow b \in [a]$

وبما ان R علاقة متناظرة فان $(a,b) \in R$. وايضا بما ان R علاقة متعدية اذن

$$(x,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow (x,a) \in R$$

وبذلك نحصل على $y \in [b]$ وبالتالي يكون $[a] \subseteq [b]$ .... (2).

ومن (1) و (2) نحصل على $[a] = [b]$.

3) ← نفرض ان $[a] = [b]$ من (1) $a \in [a] \leftarrow a \in [b]$ اذن $(a,b) \in R$ (من تعريف صف التكافؤ)

→ نفرض $(x,y) \in R$ فاذا كان $x \in [a]$ فيكون $(x,a) \in \mathrm{R}$. اذن

$$(x,a)(a,b) \in R \rightarrow (x,b) \in R$$

وبذلك نحصل على $x \in [b]$ وبالتالي يكون $[a] \subseteq [b]$ .... (1)

وبنفس الطريقة نفرض $y \in [b] \leftarrow (y,a) \in R$ وبما ان R علاقة متناظرة فيكون $(b,a) \in R \rightarrow (b,a) \in$

وبما ان R علاقة متعدية ، اذن :

$$(y,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow (y,a) \in R$$

اي ان 2) ..... $y \in [a]$

من 1) و 2) يكون $[a] = [b]$.

تعريف : لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ مجموعات جزئية غير خالية من المجموعة A فان $\{A_i\}_{i\in I}$ تسمى تجزئة (Partition) للمجموعة A *اذا حققت الشروط التالية:*

$$1) A_i = A_j \;\; \wedge \;\; A_i \cap A_j \;\; = \emptyset \,, \forall i,j \in I \qquad 2) A = \bigcup_{i\in I} A_i \;.$$

مثال : اذا كانت $A_1 = Z_e \wedge A_2 = Z_o \;\; \wedge \;\; A = Z$ نلاحظ ان $A_1, A_2 \subseteq A \wedge \; A_1 \cup A_2 = A \wedge \; A_1 \cap A_2 \;\; = \emptyset$ وعليه فان $\{ A_1, A_2\}$ تجزئة ل A .

مبرهنة (١١-٢) :

لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A ولتكن $\{A_a\}a \in A$ ممثلة جميع صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R ، فأن $\{A_a\}a \in A$ تجزئة للمجموعة A

تعريف : لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة $A \neq a$ ، فأن مجموعة جميع الصفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R تسمى (مجموعة القسمة) *Quotient Set*

مثال : لتكن N مجموعة الاعداد الطبيعية وان R علاقة على N كالاتي :

$$R = \left\{(x, y) \in N \times N : x - y \text{ يقبل القسمة على } 3\right\}$$

فأن $N/R = \{[0], [1], [2]\}$ ؟

(c) : لتكن $A = \{1,3,5,7,9\}$ وان كل من S,R علاقة معرفة على A كالاتي :

$$R = I_A \cup \{(1,3), (3,1), (5,7), (7,5)\}$$

$$S = I_A \cup \{(1,3), (3,1), (5,7), (7,5), (5,9), (9,5), (7,9), (9,7)\}$$

علينا ان نبرهن ان كل من R,S علاقة تكافؤ على Aحيث :

$$A/R = \{[1], [5], [9]\} \quad , \quad A/S = \{[1], [5]\}$$