أسرة المجموعة (Family of set)

تعريف :- المجموعة التي فيها كل عنصر هو مجموعة بحد ذاتها تسمى اسرة مجموعات (Family of sets) فمثلا $B = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{e, f\}$ فان المجموعة $\{A, B, C\}$ تسمى اسرة مجموعات .

* اسرة المجموعة هي مجموعة كل عنصر فيها هو مجموعة .

تعريف مجموعة الاجزاء :- لتكن A مجموعة فان مجموعة كل المجموعات الجزئية من A تسمى مجموعة الاجزاء (power of set) ونرمز لها بالرمز $P(A)$ اي انه $P(A) = \{B: B \subseteq A\}$

مثال :- لتكن $A = \{2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$, جد $P(A)$, $P(B)$

الحل /

$$P(A) = \{B: B \subseteq A\} = \{\emptyset, A, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

$$P(B) = \{D: D \subseteq B\} = \{\emptyset, B, \{5\}, \{6\}\}$$

ملاحظة :- 1- اذا كان n يمثل عدد عناصر المجموعة A و m تمثل عدد عناصر المجموعة $P(A)$ فان $m = 2^n$

2- اذا كانت A مجموعة منتهية فيمكن كتابة عناصر $P(A)$ اما اذا كانت A مجموعة غير منتهية فنصف عناصر $P(A)$ بالشكل $P(A) = \{B: B \subseteq A\}$.

مبرهنة :- اذا كانت A و B مجموعتين فان

1- $P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

2- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

3- $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

البرهان :- برهان (1 ،2) ص130-132

3- $D \in p(A) \Leftrightarrow D \subset A$

نفرض $D \in P(A) \cup P(B)$ للبرهنه على ان $D \in P(A \cup B)$

اي نبرهن ان $D \in A \cup B$

بما ان $D \in P(A) \cup P(B)$ اذن

$$\Longrightarrow \mathrm{D} \in \mathrm{P(A)} \vee \mathrm{D} \in \mathrm{P(B)}$$

$$\Longrightarrow D \subset A \wedge D \subset B$$

$$\therefore D \subset A \cup B$$

$$\Longrightarrow D \in P(A \cup B)$$

$$\therefore P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$$

تمرين :- اعط مثال $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$

الحل / نفرض ان $B = \{2\}, A = \{1\}$

نلاحظ ان $A \cup B = \{1,2\}$

$$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, A\}, P(B) = \{\emptyset, B\}$$

$$P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, A, B\} \neq P(A \cup B) = \{\emptyset, A \cup B, A, B\}$$

اسرة المجموعة المرقمة (*Index family of sets*)

تعريف: لتكن F اسرة مجموعات ولتكن I مجموعة ما فاذا كان لكل $i \in I$ يوجد عنصر وحيد A_i في F فتسمى المجموعة I بالمجموعة الدالة (Indexed set) والعنصر i يسمى بالدليل للمجموعة A_i و F تسمى اسرة مجموعة مرقمه ونرمز لها بالرمز $\{\mathrm{A}\}_{i\in I}$ اي ان $F = \{\mathrm{A}\}_{i\in I}$.

ملاحظة :- اذا كانت المجموعة الدالة I منتهيه فنحصل على اسرة مجموعات مرقمه منتهيه عدا ذالك تكون اسرة المجموعات المرقمة غير منتهيه .

مثال :- لتكن $I = \{1,2,3\}$ ولتكن $F = \{A_1, A_2, A_3\}$ فان F اسرة مجموعة مرقمة ويمكن كتابتها بالشكل
$F = \{\mathrm{A}\}_{i\in I}$

مثال :- اكتب عناصر المجموعات المرقمه التالية

1- $F = \{A_i\}_{i\in I=\{1,2\}} \to F = \{A_1, A_2\}$

2- $F = \{B_i\}_{i\in I=\{1,2,3,4,5\}} = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$

3- $D = \{C_i\}_{i\in I=\{1,2,\dots\}} = \{C_1, C_2, \dots\}$

تعريف :- لتكن $\{\mathrm{A}\}_{i\in I}$ اسرة مجموعات مرقمه فان

1- اتحاد $\cup_i$ والذي يرمز له بالرمز $\cup_{i\in I} A_i$ يعرف بالشكل $\cup_{i\in I} A_i = \{x: \exists i \in I \ni x \in A_i\}$

2- تقاطع $\cap_i$ والذي يرمز له بالرمز $\cap_{i\in I} A_i$ يعرف بالشكل $\cap_{i\in I} A_i = \{x: x \in A_i \in I, \vee\, i \in I\}$

مبرهنة(2-14): لتكن $\{A\}_{i\in I}$ جمله من مجموعات مرقمه ما

(1) $A_i \subseteq B,\ \forall\, i \in I \implies \bigcup A_i \subseteq B$

(2) $B \subseteq A_i,\ \forall\, i \in I \implies B \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$

البرهان: (1) ص135

H.W(2)

مبرهنة(2-15): لتكن $\{A\}_{i\in I}$ جمله من مجموعات مرقمه فان

(1) $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

(2) $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

البرهان:

(1) نفرض أن $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

أذن $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

H.W (2)

مبرهنة(2-16) : (تعميم قانون التوزيع) لتكن كل من $\{A\}_{i\in I}, \{B\}_{j\in J}$ أسرة مجموعات مرقمة ، فأن:

(1) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$

(2) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$

البرهان: ص137-138