تعريف

المعادلة التفاضلية : هي علاقة تساوي بين متغير مستقل (x) ومتغير تابع $y(x)$ و واحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية $y^{/}, y^{//} . y^{///}, \dots$ اي انها على صورة $F(x, y, y^{/}, y^{//} . y^{///}, \dots\dots y^{n}) = 0$ وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية اعتيادية ***ordinary differential equation***

تعريف

المعادلات التفاضلية الجزئية :

هي معادلة رياضية التي تحتوي على دالة مجهولة unknown function (دالة مجهولة) لاكثر من متغير مستقل واحد in depended مع المشتقات الجزئية لهذه الدالة بالنسبة للمتغيرات المستقلة .

$$\boldsymbol{u = u(x, y)\ ,\ \ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)}$$

امثلة /

$$\left.\begin{array}{l} (y^{//})^2 + 2(y^{/})^3 - 5y = \sin x \\ y^3 + xy^2 = x^2 \end{array}\right\}$$ معادلات تفاضلية اعتيادية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3$$ معادلات تفاضلية جزئية

رتبة المعادلة التفاضلية : هي أعلى مشتقة موجودة في المعادلة التفاضلية .

درجة المعادلة التفاضلية : هي أس أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية(أس أعلى مشتقة فيها) بشرط ان تكون جميع المعادلات التفاضلية خالية من القوى الكسرية

أمثلة : اذكر نوع المعادلة التفاضلية وأعطِ الرتبة والدرجة لها

نوع المعادلة	الرتبة (اس اكبر مشتقة)	الدرجة	المعادلة التفاضلية
اعتيادية	الاولى	الأولى	$y\frac{dy}{dx}+x^2=0$
اعتيادية	الثانية	الأولى	$yy^{//}-xy^4+5y=0$
جزئية	الاولى	الأولى	$\frac{dz}{dy}-\frac{d^2z}{dx}=3$
جزئية	الثانية	الثانية	$\frac{d^2h}{dx^2}-\frac{d^2h}{dy^2}+(\frac{d^2h}{dx^2})^2$
اعتيادية	الثانية	الرابعة	$(y^{//})^2=\sqrt{1+(y^/)^2}$ تربيع الطرفين $(y^{//})^4=1+(y^/)^2$

تعريف / حل المعادلة التفاضلية يسمى $y=y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية الاعتيادية إذا كانت
١- y(x) قابلة للاشتقاق n من المرات
٢- y(x) تحقق المعادلة التفاضلية الاعتيادية .

مثال١ / اثبت ان $y(x)=c\sin x$ حلا للمعادلة التفاضلية $y^{//}+y=0$

$y^/=c\cos x \qquad y^{//}=-c\sin x$

$LHS=y^{//}+y=-c\sin x+c\sin x=0=RHS$

<u>مثال٢ /</u> بين أن $\ln y^2=x+a$, $a\in R$ حلا للمعادلة $2y^/-y=0$

الحل /

$\ln y^2=x+a$

$2\ln|y|=x+a$

$2\frac{1}{y}(y^/)=1$

$2y^/=y$

$2y^/-y=0$

مثال٣/ برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$

هو حلا للمعادلة التفاضلية $y^{//} + 4y = 0$

الحل /

$$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y^{/} = -6\sin 2x + 4\cos 2x$$

$$y^{//} = -12\cos 2x - 8\sin 2x \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

نعوض (1) و (2) في الايسر للمعادلة التفاضلية $y^{//} + 4y = 0$

$$LHS = y^{//} + 4y = -12\cos 2x - 8\sin 2x + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$$

$$= -12\cancel{\cos 2x} - 8\cancel{\sin 2x} + 12\cancel{\cos 2x} + 8\cancel{\sin 2x} = 0 = RHS$$

تمارين

س١/ بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادلة التفاضلية $xy^{/} = x^2 + y$

س٢/ اثبت ان $y = x\,ln|x| - x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y$

س٣/ بين أن $\ln y^2 = x + a$, $a \in R$ حلا للمعادلة $2y^{/} - y = 0$

س٤ / هل $y = x^3 + x - 2$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$

س٥/ برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y^{//} + 4y = 0$

س٦ / هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة $yy^{//} + (y^{/})^2 - 3x = 5$

س٧ / بين $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلا للمعادلة $y^{//} + y^{/} - 6y = 0$

س٨/ برهن ان $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $y^{//} + y = 0$

س٩/ بين ان $ln|y| = x^2 + c$, $c \in R$ حلا للمعادلة $y^{//} = 4x^2y + 2y$

س١٠/بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلا للمعادلة $y^{/} + y = 0$ حيث $a \in R$

س١١/ برهن ان $y = \cos x$ هو حل للمعادلة $y^{//} + y = 0$

الحل الخاص والحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية

الحل العام لمعادلة التفاضلية الاعتياديـة من الرتبـة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية ويحقق المعادلة التفاضلية .
واما الحل الخاص هو اي حل يحقق المعادلة التفاضلية لا يشتمل على اي ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه احيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة .

تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت)

اذا اعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من ارتبة n نجد ان ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على صورة $F(x, y, c_1, c_2, \dots\dots, c_n) = 0$
حيث $c_1, c_2, \dots\dots, c_n$ ثوابت اختيارية ، وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجري n من المشتقات للمعادلة

يكون لدينا n+1 من المعادلات عبارة عن المعادلة (1) بالاضافة الى n معادلة من العمليات التفاضلية التي عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة .

مثال ١ / اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

الحل / تفاضل مرتين

$$y^{/} = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$$

$$y^{//} = 4Ae^{2x} + 4Be^{-2x}$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y^{/} & 2 & -2 \\ y^{//} & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y^{/} & 2 & -2 \\ y^{//} & 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} y & 1 \\ y^{/} & 2 \\ y^{//} & 4 \end{matrix} = 0$$

$$(8y - 2y^{//} + 4y^{/}) - (2y^{//} - 8y + 4y^{/}) = 0$$

$$-4y^{//} + 16y = 0$$

مثال ٢ / اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = k\,sin^{-1}x$

$$y = k\,sin^{-1}x$$

$$y' = \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{vmatrix} y & sin^{-1}x \\ y' & \frac{1}{\sqrt{1-x^1}} \end{vmatrix} = 0 \qquad y\frac{1}{\sqrt{1-x^1}} - y'sin^{-1}x = 0$$

مثال ٣ / اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = Ax + \ B\,x^2$

$$y = Ax + \ B\,x^2$$

$$y' = A + \ 2Bx$$

$$y'' = 2B$$

$$\begin{vmatrix} y & x & x^2 \\ y' & 1 & x \\ y'' & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} y & x & x^2 \\ y' & 1 & 2x \\ y'' & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} y & x \\ y' & 1 \\ y'' & 0 \end{matrix} = 0$$

$$(2y + 2y''x^2 + 0) - (y''x^2 + 0 + 2y'x) = 0$$

$$y''x^2 - 2y'x + 2y = 0$$

مثال ٤ / اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$

الحل / تفاضل مرتين

$$y' = 3Ae^{3x} + 5Be^{5x}$$

$$y'' = 9Ae^{3x} + 25Be^{5x}$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 3 & 5 \\ y'' & 9 & 25 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 3 & 5 \\ y'' & 9 & 25 \end{vmatrix}\begin{matrix} y & 1 \\ y' & 3 \\ y'' & 9 \end{matrix} = 0$$

$$(75y + 5y'' + 9y') - (3y'' + 45y + 25y') = 0$$

$$2y'' - 16y' - 40y = 0$$

مثال٥ / اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = c \sin x$

الحل /

$$y = c \sin x \quad \dots\dots(1)$$
$$y^{/} = c \cos x \quad \dots\dots(2)$$
$$\frac{y^{/}}{y} = \frac{c \cos x}{c \sin x} = \cot x$$
$$y^{/} = y \cot x$$

س١/ اوجد المعادلة التفاضلية العادية بحذف الثوابت a , b , c

1) $y = ax^2 - bx + c$

2) $y = ae^{2x} + be^{x}$

3) $y = a\sin 3x + b\cos 3x$

4) $\ln y = ax^2 + bx + c$

5) $y = ae^{x} + be^{2x} + ce^{3x}$

6) $y = ae^{x} + b$

7) $y = a + bx + x^2$

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية العادية
من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

أعداد الأستاذ

عبدالسلام محمد علي

2016

07712440055

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الاولى والدرجة الاولى

==

المعادلات التي يمكن إيجاد حلها بصورة مباشرة هي :-

١- طريقة فصل المتغيرات

٢- معادلات تفاضلية المتجانسة

٣- معادلات تفاضلية تامة .

٤- طريقة تعيين عامل التكامل $I(x,y)$

٥- المعادلات التفاضلية الخطية

٦- معادلات تفاضلية تؤول الى خطية (أ- برنولي ، ٢- معادلة ريكاتي ، ٣- المعادلات التفاضلية على صورة $f^{/}(y)\frac{dy}{dx}+p(x)f(y)=Q(x)$)

==

اولاً : طريقة فصل المتغيرات separation of variables

لحل المعادلات من هذا النوع نتبع الآتي :-

١- نعزل الحدود التي تحتوي على x مع dx في طرف والحدود التي تحتوي y مع dy في الطرف الآخر فنحصل على معادلة بالشكل $g(y)dy=f(x)dx \quad \cdots\cdots \ (1)$

٢- نكامل طرفي المعادلة (1) فيكون (c ثابت اختياري) $\int g(y)dy=\int f(x)dx$

٣- قدر الإمكان ان نضع حل المعادلة y بدلالة x

07712440055

مثال١/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

$$dy = (2x + 5)dx$$

$$\int dy = \int (2x + 5)dx$$

$$y = x^2 + 5x + c$$

الأستاذ عبدالسلام محمد علي

مثال٢/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$$

$$ydy = (x - 1)dx$$

$$\int ydy = \int (x - 1)dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$$y = \mp\sqrt{x^2 - 2x + c_1}$$

مثال٣/ حل المعادلة $dy = \sin x \cos^2 y\, dx$ حيث $\cos y \neq 0 , y \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

الحل /

$$dy = \sin x \cos^2 y\, dx$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x dx$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x dx$$

$$\sec^2 y\, dy = \sin x dx$$

$$\int \sec^2 y\, dy = \int \sin x\, dx$$

$$\tan y = -\cos x + c$$

مثال٤ / حل المعادلة $y^{/}-x\sqrt{y}=0$ عندما $x=2\ ,\ y=9$

الحل /

$$y^{/}-x\sqrt{y}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=xy^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}}=xdx$$
$$\int y^{-\frac{1}{2}}dy=\int xdx$$
$$2y^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^2+c$$

نعوض عن $x=2\ ,y=9$

$$2(3)=\frac{(2)^2}{2}+c \Longrightarrow 6=2+c \Longrightarrow c=4$$
$$2y^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^2+4$$

نضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{2}$ ثم نربع الطرفين نحصل على

$$y=(\frac{1}{4}x^2+4)^2$$

مثال٥ / حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=e^{2x+y}$ حيث $y=0$ عندما $x=0$

الحل /

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}\cdot e^{y}$$
$$\frac{dy}{e^{y}}=e^{2x}dx$$
$$\int e^{-y}dy=\int e^{2x}dx$$
$$-e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

نعوض عن $x=0\ ,\ y=0$

$$-e^{0}=\frac{1}{2}e^{0}+c \Longrightarrow -1=\frac{1}{2}+c \Longrightarrow c=\frac{-3}{2}$$
$$-e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}$$

مثال٦ / جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(\mathbf{x}+1)\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = 2y$

الحل /

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x+1}$$

$$ln|y| = 2ln|x+1| + c$$

$$ln|y| - ln(x+1)^2 = c$$

$$ln\frac{|y|}{(x+1)^2} = c$$

$$\frac{|y|}{(x+1)^2} = e^c$$

$$|y| = e^c(x+1)^2$$

$$y = \mp c_1(x+1)^2$$

حيث $c_1 = e^c$ ثابت اختياري

مثال٧/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\mathrm{e^x} \cos y\, dx + (1+e^x)\sin y\, dy = 0$

$$(1+e^x)\sin y\, dy = -\mathrm{e^x} \cos y\, dx$$

$$\int \frac{\sin y\, dy}{\cos y} = \int \frac{-\mathrm{e^x}\, dx}{1+e^x}$$

$$ln|\cos y| = ln|1+e^x| + c$$

$$ln\left|\frac{\cos y}{1+e^x}\right| = c$$

س/ حل للمعادلة $(x^2+y)dx + (y^3+x)dy = 0$

الحل /

$$x^2dx + (ydx + xdy) + y^3dy = 0$$
$$\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{4}y^4 = c$$

مثال٨/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x\,y\,dy - \frac{1+y^2}{1+x^2}\,dx = 0$

$$x\,y\,dy = \frac{1+y^2}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

س ١ / اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\sin^{-1}y = \tan^{-1}x + c$$

س٢ / اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{y^2-1}}{1-x^2}$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$\sec^{-1}y = \tanh^{-1}x + c$$

س٣/ اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{(1-y^2)\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-y^2)\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$$

$$\tanh^{-1}y = \sinh^{-1}(\sin x) + c$$

س4/ اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{(1+y^2)e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}x}}$

$$\int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}x}}$$

$$\tan^{-1}y=\frac{1}{2}\sin^{-1}e^{2x}+c$$

==

س5/ اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-e^{2y}}}{e^x+e^{-x}}$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-e^{2y}}}=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-e^{2y}}}=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$$

$$let\quad t=e^y \qquad dt=e^y dy$$

$$\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$$

$$-\mathrm{sech}^{-1}t=\tan^{-1}e^x+c$$

$$-\mathrm{sech}^{-1}e^y=\tan^{-1}e^x+c$$

==

س6/ اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}+2x\sqrt{1-y^2}$

$$\frac{dy}{dx}=2x\sqrt{1-y^2}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int 2x dx$$

$$\sin^{-1}y=x^2+c$$

==

س7/ اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(1+y^2)dx+\sqrt{1-x^2}\,dy$

$$\sqrt{1-x^2}\,dy=-(1+y^2)dx$$

$$\int\frac{dy}{(1+y^2)}=\int\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan^{-1}y=\cos^{-1}x+c$$