التكامل الثنائي *Dobell Integrals*

التكامل الثنائي هو أحد أنواع التكامل المحدد الموسع ليشمل الدوال المعرفة في متغيرين ، فاذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة في المنطقة $\boldsymbol{R}$ من المستوى xy فان $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ يُسمىٰ التكامل الثنائي أو التكامل المضاعف للدالة $f(x,y)$ في المنطقة $\boldsymbol{R}$.

وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي وفي الكهرومغناطيسية والحرارة والموجات الصوتية والميكانيك ومواضيع اخرىٰ .

ومن اجل حل التكامل الثنائي بالصيغة أعلاه نبدأ أولاً بالتكامل الداخلي والذي نكامله بالنسبة لـ x ونعتبر y ثابتاً ثم نجد قيمة التكامل الخارجي والذي نكامله بالنسبة لـ y .

اما اذا كان بالصيغة $\iint\limits_R f(x,y)dydx$ فإننا نبدأ اولاً بالتكامل الداخلي والذي نكامله بالنسبة لـ y ونعتبر x ثابتاً ثم نجد قيمة التكامل الخارجي والذي نكامله بالنسبة لـ x .

مثال (١) احسب $\iint\limits_R (3y^2-x)dxdy$ اذا علمت ان $R=\{(x,y) : 0\le x\le 2 \ , \ 1\le y\le 2\}$.

الحل :

$$\iint\limits_R (3y^2-x)dxdy = \int_1^2\int_0^2 (3y^2-x)dxdy$$

$$= \int_1^2 3y^2x-\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 dy = \int_1^2 \left(3y^2\times 2-\frac{(2)^2}{2}-0\right)dy$$

$$= \int_1^2 (6y^2-2)dy = 2y^3-2y\bigg|_1^2$$

$$= 16-4-2+2 = 12$$

مثال (٢) احسب قيمة التكامل الثنائي $\int_1^2 \int_y^{y^2} dxdy$

الحل :

$$\int_1^2 \int_y^{y^2} dxdy = \int_1^2 x\Big|_y^{y^2} dy = \int_1^2 (y^2 - y)\, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{5}{6}$$

مثال (٣) احسب قيمة التكامل الثنائي $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin y \, dydx$

الحل :

$$\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin y \, dydx = \int_0^{\pi} -x \cos y\Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^{\pi} (-x \cos x + x \cos 0) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (-x \cos x + x) dx$$

x and it's $D.$	$\cos x$ and it's $I.$
x	$\cos x$
1	$\sin x$
0	$-\cos x$

$$= x \sin x - \cos x + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= 0 - (-1) + \frac{\pi^2}{2} - 0 + 1 - 0 = 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

مثال (٤) احسب قيمة التكامل الثنائي $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y \, dydx$

الحل :

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y \, dydx = \int_0^{\pi} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{4}$$

مثال (٥) احسب قيمة التكامل الثنائي $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dxdy$

الحل :

$$\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dxdy = \int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{y}.e^{x}\,dxdy$$

$$= \int_1^{\ln 8} e^{y}.(e^{x}) \Big|_0^{\ln y} dy$$

$$= \int_1^{\ln 8} e^{y}(y-1)dy$$

$$= e^{y}(y-1) - y \Big|_0^{\ln 8}$$

$$= 8\ln 8 - 16 + e$$

$(y-1)$ and it's D.		e^y and it's I.
$(y-1)$	+	e^y
1	-	e^y
0		e^y

<u>تمارين</u>

احسب قيم التكاملات الثنائية التالية :

1. $\int_0^{2}\int_1^{e^x} dydx$

2. $\int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} dydx$

3. $\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} dxdy$

4. $\int_0^{1}\int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xydxdy$

5. $\int_0^{\sqrt{\ln 3}}\int_0^{2x} e^{x^2}dydx$

6. $\int_0^{1}\int_0^{1}\int_0^{1}(x^2+y^2+z^2)dzdydx$