Partial Derivatives المشتقات الجزئية

الدوال في متغيرين : يُسمى المتغير $z = f(x,y)$ دالة بالمتغيرين x و y اذا كان لكل زوج (x,y) توجد قيمة واحدة للمتغير z.

مثلا اذا كان $f(x,y) = x^2y - 3xy$ فان $f(2,-1) = 2^2 \times (-1) - 3 \times 2 \times (-1) = 2$

المشتقات الجزئية

المشتقة الجزئية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير x هي نفس المشتقة الاعتيادية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير x وذلك باعتبار y ثابت وتكتب $\frac{\partial f}{\partial x}$ أو f_x و المشتقة الجزئية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y هي نفس المشتقة الاعتيادية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير y وذلك باعتبار x ثابت وتكتب $\frac{\partial f}{\partial y}$ أو f_y .

فمثلا : اذا كانت $f(x,y) = e^{2x} \cos y$ فان $f_x = 2e^{2x} \cos y$ و $f_y = -e^{2x} \sin y$

المشتقات الجزئية من رتبة أعلى

اذا كانت الدالة $f(x,y)$ لها مشتقات جزئية فان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ هي نفسها دوال ويمكن ان يكون لها مشتقات جزئية ، هذه المشتقات الثانية تأخذ الرموز :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

مثال (١): جد : f_{xx} ، f_{yy} ، f_{yx} و f_{xy} للدوال التالية :

1. $f(x,y) = x^2 + xy^2$
2. $f(x,y) = \ln(2x+2y) + \tan(2x-2y)$

الحل :

1. $f_x = 2x + y^2 \quad \rightarrow \quad f_{xx} = 2 \quad , \quad f_{xy} = 2y$

$f_y = 2xy \quad \rightarrow \quad f_{yy} = 2x \quad , \quad f_{yx} = 2y$

2. $$f_x = \frac{2}{2x+2y} + 2\sec^2(2x-2y) = \frac{1}{x+y} + 2\sec^2(2x-2y)$$

$$f_{xx} = \frac{-1}{(x+y)^2} + 8\sec^2(2x-2y)\ \tan(2x-2y)$$

$$f_{xy} = \frac{-1}{(x+y)^2} - 8\sec^2(2x-2y)\ \tan(2x-2y)$$

$$f_y = \frac{2}{2x+2y} - 2\sec^2(2x-2y) = \frac{1}{x+y} - 2\sec^2(2x-2y)$$

$$f_{yy} = \frac{-1}{(x+y)^2} + 8\sec^2(2x-2y)\ \tan(2x-2y)$$

$$f_{xy} = \frac{-1}{(x+y)^2} - 8\sec^2(2x-2y)\ \tan(2x-2y)$$

معادلة لابلاس : لتكن الدالة $f(x,y)$ قابلة للاشتقاق فمعادلة لابلاس هي $f_{xx} + f_{yy} = 0$

مثال (٢): بين ان الدالة $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$ تحقق معادلة لابلاس

الحل :

$$f_x = -2e^{-2y}\sin 2x \quad \rightarrow \quad f_{xx} = -4e^{-2y}\cos 2x$$

$$f_y = -2e^{-2y}\cos 2x \quad \rightarrow \quad f_{yy} = 4e^{-2y}\cos 2x$$

$$f_{xx} + f_{yy} = -4e^{-2y}\cos 2x + 4e^{-2y}\cos 2x = 0$$

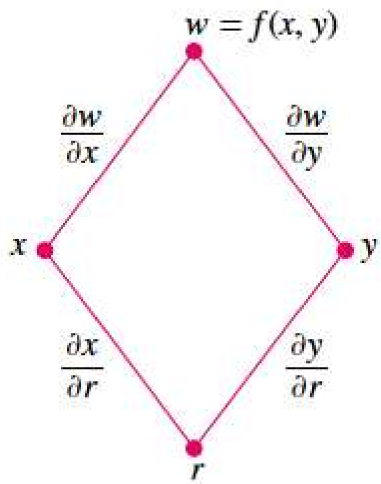
وعليه فان الدالة $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$ تحقق معادلة لابلاس

مشتقات الدوال المؤلفة : (قاعدة السلسلة)

اذا كانت $w = f(x,y)$ حيث $x = g(r,s)$ و $y = h(r,s)$ فان :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad and \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Chain Rule



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

مثال (٣): جد $\partial w/\partial s$ و $\partial w/\partial r$ بدلالة s و r اذا علمت ان $w = x^2 + y^2, x = r - s, y = r + s$

الحل: $w_x = 2x = 2r - 2s \;,\; w_y = 2y = 2r + 2s$

$$\partial x/\partial r = 1 \;, \quad \partial x/\partial s = -1 \;, \quad \partial y/\partial r = 1 \;, \quad \partial y/\partial s = 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2r - 2s) \times (-1) + (2r + 2s) \times 1 = 4s$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2r - 2s) \times 1 + (2r + 2s) \times 1 = 4r$$

تمارين

جد f_{xx} , f_{yy} , f_{yx} و f_{xy} للدوال التالية :

1. $f(x,y) = x^2 \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$
2. $f(x,y) = \ln(xy) + \tan(xy)$
3. $f(x,y) = x^2 e^x \sin y + 3x - 2\cos(x+2y)$
4. $f(x,y) = e^{xy} + \tan^{-1}(xy)$

اثبت ان $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ اذا كان :

5. $w = \cos(x+y) + \sin(x-y)$
6. $w = \cos(2x-2y) + e^x \sinh y$

جد $\partial z/\partial v$ و $\partial z/\partial u$ عند النقطة المعطاة

7. $z = e^x \ln y \quad , \quad x = \ln(u\cos v) \quad , \quad y = u\sin v \quad , \quad (u,v) = (2, \pi/4)$
8. $z = \tan^{-1}(x/y) \quad , \quad x = u\cos v \quad , \quad y = u\sin v \quad , \quad (u,v) = (1.3, \pi/6)$

بين ان الدوال التالية تحقق معادلة لابلاس

9. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
10. $f(x,y) = e^{-3x}\sin 3y$

11. اذا كانت $u = ax + by \quad , \quad w = u^3 + \tanh u + \cos u$ حيث a, b ثوابت فاثبت ان

$$a\frac{\partial w}{\partial y} = b\frac{\partial w}{\partial x}$$