باستخدام الحقيقة الرياضية والتي تقضي أن ترتيب الدوال الرياضية التي تحتوي على اكثر من متغير يكون عديم الأثر أي أن :

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} \quad ---(35)$$

من المعادلات (32) ، (34) و (35) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} = u^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} \quad ---(36)$$

المعادلة (36) هي المعادلة التفاضلية للموجات الصوتية في بعد واحد بدلالة الضغط الصوتي للمائع (وتمثل الموجة الضاغطة في المائع) .

وبمقارنة معادلة الموجة بدلالة الإزاحة الطولية η (معادلة (31)) مع معادلة الموجة بدلالة الضغط الصوتي (معادلة (36)) نلاحظ أن لهما نفس الشكل تماماً .

معادلة الموجة الصوتية (الطولية) بدلالة حركة الجسيمات والتكاثف

يمكن إتباع نفس الطريقة أعلاه لإيجاد معادلة الموجة الصوتية (الطولية) في بعد واحد بدلالة حركة الجسيمات ($V=\frac{\partial \eta}{\partial t}$) وكذلك بدلالة التكاثف ($s=-\frac{\partial \eta}{\partial x}$) ويكون الناتج كما يلي :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad ---(37)$$

معادلة (37) هي المعادلة التفاضلية للموجات الصوتية في بعد واحد بدلالة حركة الجسيمات في المائع (V) .

كما يمكن إيجاد المعادلة التفاضلية للموجات الصوتية في بعد واحد بدلالة التكاثف s للمائع (الاثبات مطلوب) وهي معادلة (38)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad ---(38)$$

سرعة الموجات الصوتية في الغاز

رغم اختلاف المتغيرات المستخدمة للتعبير عن معادلة الموجة الصوتية في المائع بدلالة الازاحة الأنية (معادلة 31) وبدلالة الضغط الصوتي (معادلة 36) وبدلالة سرعة الجسيمات (معادلة 37) وبدلالة التكاثف (معادلة 38) الا أن سرعة الموجة لجميع هذه المعادلات تأخذ نفس القيمة $\left(u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\right)$.

والسؤال الذي يطرح نفسه هو: (هل أن انتقال الموجات الصوتية في الهواء هي عملية أيزوثرمية ((تحت درجة حرارة ثابتة)) أم هي عملية أديباتيكية ((عملية كظمية)) ؟

لقد أعتبر العالم أسحق نيوتن عملية انتقال الموجات الطولية (الصوتية) في الهواء عملية أيزوثرمية (أي تحدث في درجة حرارة ثابتة) واعتقد أن كمية الحرارة القليلة المتولدة عند مناطق التضاغط تنتقل حال تولدها الى مناطق التخلخل (مناطق التخلخل يحدث فيها تبريد ضئيل عند مرور الموجات الصوتية ومناطق التضاغط يحدث فيها تسخين ضئيل عند مرور الموجات الصوتية فيها) وبسبب انتقال كمية الحرارة القليلة هذه والمتولدة عند مناطق التضاغط الى مناطق التخلخل (كما أعتقد نيوتن) فان الغاز عندما تمر خلاله الموجات الصوتية يكون تحت درجة حرارة ثابتة (أي أن الغاز الذي يحمل الموجة الصوتية يكون خاضعاً لمعادلة الغاز الأيزوثرمية) أي أن:

$$PV = \text{Constant}$$

حيث أن: P ضغط الغاز ، V حجم الغاز قبل مرور الموجة الصوتية

بتفاضل طرفي المعادلة اعلاه نحصل على

$$P\,dV + V\,dP = 0$$

حيث أن: dP هو مقدار الزيادة بالضغط عند مرور الموجة الصوتية والتي تحدث نقصان بالحجم مقداره dV والعكس بالعكس

$$P = -\frac{V\,dP}{dV} = -\frac{dP}{dV/V} \quad \text{---} \quad (39)$$

ولكن كما معروف أن معامل المرونة الحجمي K يساوي

حسب المعادلة بعد معادلة (22)

$$K = -\frac{dP}{dV/V}$$ (حسب تعريف معامل المرونة الحجمي)

من المعادلتين الأخيرتين نستنتج أن:

$$K = P \quad --- (40)$$

وهنا نعرف K بأنها تمثل معامل المرونة الأيزوثرمي.
وعليه تكون سرعة الصوت تحت الشروط الايزوثرمية كما يلي:

$$U = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{P}{\rho_0}} \quad --- (41)$$

حل معادلات الموجة الصوتية:

لحل معادلات الموجة الصوتية (31) ، (36) و (37) و (38)
يكفينا أيجاد الحل لأحد هذه المعادلات لأنها متشابهة.
نجد الحل بدلالة الازاحة η فقط (معادلة 31). ثم من
هذا الحل نستطيع أن نحصل على جميع المتغيرات الأخرى
المرتبطة بالموجة الصوتية ، كسرعة الجسيمات V
والتكاثف S والضغط الصوتي $\bar{P}$ باستخدام العلاقات
لكل منها.

ولأيجاد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = U^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad --- (31)$$

نرى أن هذه العلاقة متطابقة من حيث الشكل مع معادلة
الموجة الطولية في قضيب معدني وكذلك مع معادلة الموجة
المستعرضة في سلك متوتر وأن الحل العام لها:

$$\eta = A \sin k(Ut - x) + B \sin k(Ut + x) \quad --- (42)$$

الحد الأول: يمثل الموجة المتقدمة بالاتجاه الموجب للمحور السيني بسرعة ثابتة U، وأن أقصى إزاحة للموجة الطولية المتقدمة هو A ويسمى بسعة الموجة.

الحد الثاني: يمثل الموجة المتقدمة بالاتجاه السالب للمحور السيني

B: سعة الموجة المتقدمة بالاتجاه السالب

K: العدد الموجي $\left(K=\frac{2\pi}{\lambda}\right)$ $\quad U=\frac{W}{K}$, $W=KU$

وللسهولة نتعامل مع الموجة المتقدمة في اتجاه واحد فقط وليكن الاتجاه الموجب

$$\eta=\eta_1=A\sin k(Ut-x) \quad --- (43)$$

ويمكن أن نكتبها

$$\eta=\eta_0\sin k(ut-x)$$

حيث أن η_0 أقصى قيمة للإزاحة $\eta_0=A$

يمكن إيجاد الحل بدلالة سرعة الجسيم كما يلي:

$$V=\frac{\partial\eta}{\partial t}=\eta_0 W\cos k(Ut-x) \quad ---$$

$u=\frac{w}{k}$, $w=ku$

ويمكن أن نكتبها

$$\eta=V_0\cos(Wt-kx) \quad --- (44)$$

$V_0=\eta_0 W$

حيث أن V_0 أقصى قيمة لسرعة جسيمات الوسط

كما يمكن إيجاد الحل بدلالة التكاثف

$$S=-\frac{\partial\eta}{\partial x}=\eta_0 K\cos(Wt-kx)$$
$$=-S_0\cos(Wt-kx) \quad --- (45)$$

حيث أن $(S_0=-\eta_0 K)$ أقصى قيمة لسرعة جسيمات الوسط

كما يمكن إيجاد الحل بدلالة ~~التكاثف~~ الضغط الصوتي

$\cancel{S=-\frac{\partial\eta}{\partial x}=\eta_0 K\cos(wt-kx)}$ $\quad U=\sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$

$$\bar P=-K\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\rho_0U^2\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$\bar P=+K^2\eta_0\cos(wt-kx)=\rho_0U^2K\eta_0\cos(wt-kx)$$

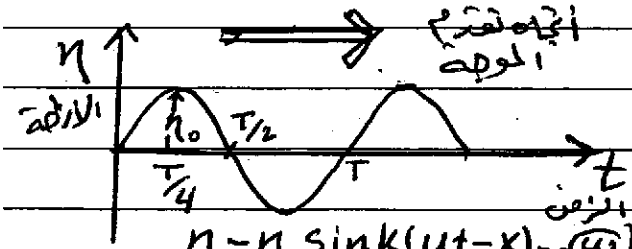
$$\bar P=\bar P_0\cos(Wt-Kx) \quad --- (46)$$

$(\bar P_0=\rho_0U^2K\eta_0)$ تمثل أقصى قيمة لضغط الصوت

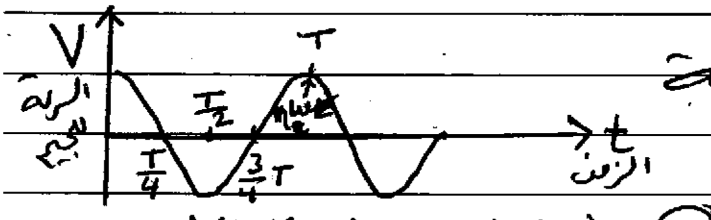
$\bar P_0=K^2\eta_0$

العلاقة بين المتغيرات المختلفة للموجة الصوتية:

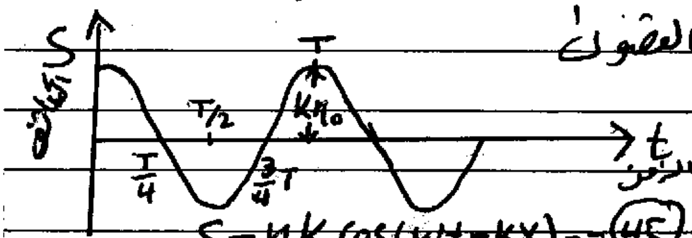
لتوضيح العلاقة بين المتغيرات المختلفة للموجة الصوتية نذكر المعادلات (43-44-45-46) من هذه المعادلات ومن رسمها البياني نلاحظ بأنه عندما تكون الموجة الصوتية متقدمة في الاتجاه السيني الموجب فأن سرعة الموجة V والتكاثف S والضغط الصوتي $\bar{P}$ تكون بنفس الطور وتتقدم على طور الازاحة η بزاوية طور تعادل $(\frac{\pi}{2} = 90^\circ)$، أي ما يعادل ربع زمن دورة $(\frac{1}{4}T)$ نلاحظ عندما تصل الجسيمات للازاحة أي عند موضع التوازن $(\eta=0)$ تكون سرعة الجسيمات وتكاثفها وضغطها الصوتي عند أقصى قيمة لها، أما عندما تصل الازاحة قيمتها القصوى عن موضع التوازن $(\eta=\eta_0)$ فأن سرعة الجسيمات وتكاثفها وضغطها الصوتي تصل الى أدنى قيمة لها (صفر)



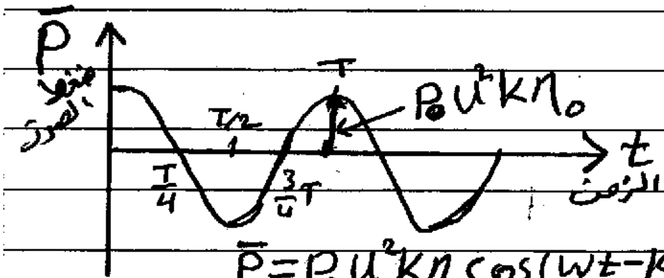
$$\eta = \eta_0 \sin k(ut - x) \quad \text{--(43)}$$



$$V = \eta_0 \omega \cos(\omega t - kx) \quad \text{--(44)}$$



$$S = \eta_0 k \cos(\omega t - kx) \quad \text{--(45)}$$



$$\bar{P} = P_0 u^2 k \eta_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{--(46)}$$

طاقة الموجة الصوتية:

أن الموجات الصوتية التي يولدها مصدر الصوت بصورة مستمرة تؤدي الى نقل مستمر بالطاقة. أن توزيع الطاقة في الموجات الصوتية يكون غير منتظم على طول الموجة الصوتية وذلك لوجود مناطق تضاغط وتخلخل. أن طاقة الجسيمات تكون على شكلين:

(1) **الطاقة الحركية E_k**: التي تمتلكها الجسيمات بسبب سرعتها. لنفرض أن شريحة رقيقة من الغاز سمكها dx ومساحة مقطعها A تتحرك بسرعة آنية V فأن طاقتها الحركية تساوي: