(5)

حل معادلة (17) يشبه حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة ويكون كما يلي

$$\left.\begin{aligned} T &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ X &= C\sin\frac{\omega}{u}x + D\cos\frac{\omega}{u}x \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

حيث A ، B ، C ، D ثوابت

نعوض المعادلة (18) بالمعادلة (14) لنحصل على الحل العام للموجة الطولية في قضيب معدني [معادلة (12)] فيكون الحل العام كما يلي:

$$\xi(x,t) = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)\left(C\sin\frac{\omega}{u}x + D\cos\frac{\omega}{u}x\right) \quad (19)$$

الموجات الطولية في عمود من المائع :

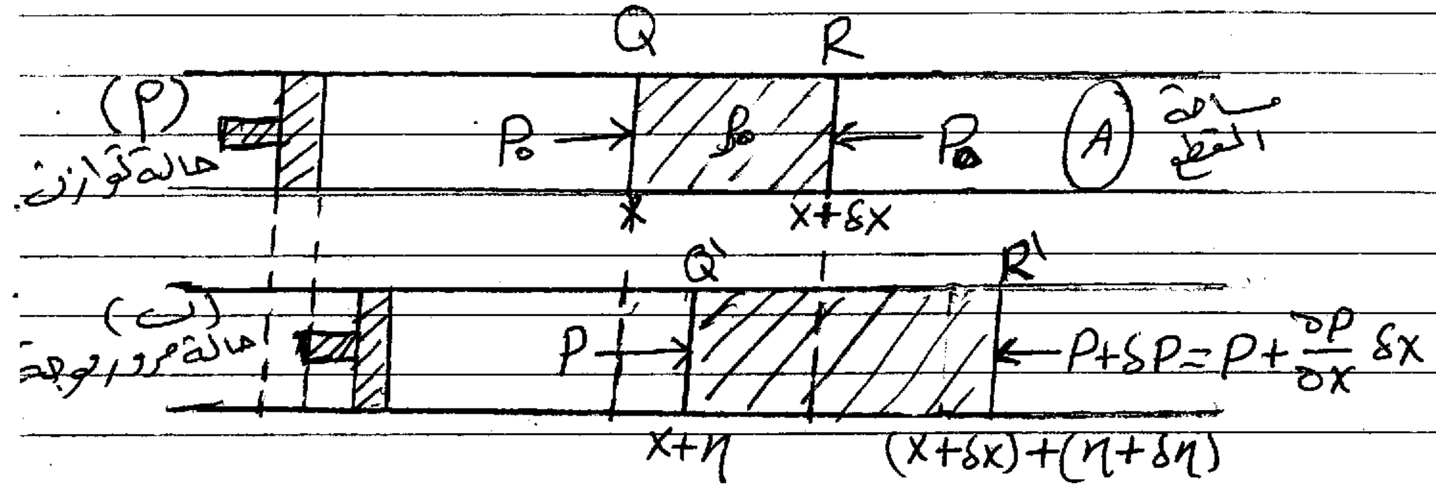
أن عمود المائع (سائل أو غاز) يشبه الى درجة ما عمود الصلب من حيث توزيع خواص الكتلة والمرونة ولكن مقدار المرونة والكثافة يختلف باختلاف الوسط وبذلك فان سرعة الموجة تختلف من وسط لآخر في حين أن طريقة انتقال الموجة الطولية هي نفسها لجميع الأوساط (في اتجاه واحد فقط).

من المفروض أن أي وسط متجانس ويخضع لقانون هوك (المطاوعة تتناسب طرديا مع الاجهاد) فان مقدار التشوه الناتج بالموجة يتناسب طرديا مع القوة المسلطة ضمن حدود المرونة.

ولكون الوسط يتألف من عدد لا حصر له من الجسيمات وأن كل جسيم يسلك سلوك المهتز في الوسط المرن الممتد لذلك يتملك مثل هذا الوسط مالانهاية من الترددات الطبيعية.

معادلة الحركة الموجية الطولية في عمود من المائع

إن معادلة الموجة الطولية في عمود من المائع تمثل معادلة الموجة الصوتية في بعد واحد. نفرض أنبوب دائري منتظم المقطع لانهائي الطول مساحة مقطعه A ويحتوي على مائع متجانس كثافته ρ وتحت ضغط P_0 ومعامل مرونته الحجمي K نفرض أن شريحة رقيقة من المائع في حالة توازن QR محصورة



بين x ، $x+\delta x$. حجم هذه الشريحة في حالة التوازن (أي عند عدم مرور موجة) يساوي $(V_o = A\cdot\delta x)$ وكتلتها $(\rho_o A\delta x)$ وأن ضغط الهواء المسلط على الشريحة من الجانبين هو P_o ، أي أن محصلة القوى المؤثرة على الشريحة تساوي صفر (كما مبين بالشكل م) لنفرض أن المكبس اندفع قليلاً" الى اليمين فاننا سنحصل على موجة تضاغطية (طولية تتقدم على طول المائع بسرعة u) وعند وصول هذه الموجة الى الشريحة QR فانها تؤثر عليها بقوة وتزيحها عن موضع توازنها الى موضع آخر هو $Q'R'$ حيث تزيح الوجه Q مسافة η والوجه R مسافة $(\eta+\delta\eta)$ ، ولكن الضغط المسلط على الوجه Q عند مرور الموجة يساوي P وعلى الوجه R يساوي $(P+\delta P)$ ، وأن فرق الضغط بين حالة مرور الموجة وحالة التوازن يساوي $(P-P_o)$ والذي يمثل التغير بالضغط الموضعي نتيجة مرور الموجة ، ويسمى هذا الضغط بـ (الضغط الصوتي أو (ضغط الموجة) $\bar{P}$ وتكون قيمته صغيرة مقارنة" مع الضغط في حالة التوازن P_o ، بحيث أن :

$$\bar{P} = P - P_o \quad \text{---} (20)$$

أن ضغط الموجة يؤدي الى تغير حجم الشريحة بمقدار $(A\delta\eta)$

[حجم الشريحة الأصلي في حالة التوازن] − [حجم الشريحة تحت ضغط الموجة] = [التغير في حجم الشريحة بسبب مرور الموجة]

$$A\delta\eta = A(\delta x + \delta\eta) - A\delta x \quad \text{---} (21)$$

$$\text{الطاقة الحجمية} = \frac{\text{التغير بالحجم}}{\text{الحجم الأصلي}} = \frac{A\delta\eta}{A\delta x} \quad --- (22)$$

$$\text{معامل المرونة الحجمي } (K) = \frac{\text{الإجهاد (التغير بالضغط أو الضغط الصوتي)}}{\text{المطاوعة الحجمية}}$$

$$K = -\frac{\bar{P}}{A\delta\eta / A\delta x} = -\bar{p}\,\frac{\delta x}{\delta\eta} \quad --- (23)$$

$$\bar{P} = -K\,\frac{\delta\eta}{\delta x} \quad --- (24)$$

الإشارة السالبة بسبب الزيادة بالضغط والتي يصاحبها دائماً نقصان بالحجم
وعندما يقترب سمك الشريحة من الصفر ($\delta x \to 0$) فإن معادلة (24) تصبح

$$\bar{P} = -K\,\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad --- (25)$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{محصلة القوى المؤثرة على} \\ \text{الشريحة في شكل (ب)}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{القوة المسلطة} \\ \text{على الوجه } Q'\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{القوة المسلطة} \\ \text{على الوجه } R'\end{array}\right]$$

$$= PA - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta x\right)A$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{محصلة القوى المؤثرة على} \\ \text{الشريحة في شكل (ب)}\end{array}\right] = -A\,\frac{\partial P}{\partial x}\,\delta x \quad --- (26)$$

إن هذه القوة الناتجة من تأثير الموجة والتي تؤدي إلى إزاحة الشريحة من موضع توازنها الأصلي ، فإذا فرضنا أن الشريحة رقيقة جداً أي أن سمكها δx يقترب من الصفر فإن الإزاحة الطولية لكل أجزاء الشريحة هي η (أي أنه يمكن إهمال $\delta\eta$ مقارنة مع η) وبما أن أي قوة تؤثر على جسم تكسبه تعجيل ، فإن التعجيل الذي تكتسبه الشريحة من تأثير القوة $A\frac{\partial P}{\partial x}\delta x$ يساوي $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ ،
نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة (محصلة القوى تساوي الكتلة في التعجيل)

$$-A\,\frac{\partial P}{\partial x}\,\delta x = \rho A\,\delta x\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (27)$$

نفاضل معادلة (20) بالنسبة لـ x (بحيث أن P_0 ثابت لأن ضغط المائع في حالة التوازن يكون مقدار ثابت).

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

نعوض بالمعادلة (27) نحصل على

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (28)$$

نفاضل معادلة (25) بالنسبة لـ x نحصل على

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (29)$$

نعوض معادلة (29) بالمعادلة (28) نحصل على:

$$K \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (30)$$

المعادلة (30) هي المعادلة التفاضلية الجزئية للحركة الموجية الطولية في مائع ذي بعد واحد.

$\left(\frac{K}{\rho_0}\right)$ هي نسبة المرونة إلى القصور الذاتي (أو كثافة المائع) وهي تساوي مربع سرعة الموجة الطولية u^2 (ولها وحدات مربع السرعة) أي أن: $\frac{K}{\rho_0} = u^2$ إذن يمكن كتابة معادلة (30) كالآتي

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (31)$$

معادلة (31) هي المعادلة القياسية للموجات الصوتية في بعد واحد بدلالة الإزاحة الطولية للمائع (سائل أو غاز)

معادلة الموجة الصوتية بدلالة الضغط الصوتي

أن المعادلة (31) لها أهمية نظرية فقط وليس لها أي فائدة عملية في مجال القياسات والتطبيقات الصوتية وذلك لأن جسيمات المائع في حالة حركة عشوائية سريعة ومستمرة وعليه فإنه من الصعوبة قياس الإزاحة الطولية للجسيمات الناتجة عن مرور موجة في المائع وذلك لأن حركة الجسيمات تكون تحت تأثير حركتين أحدهما ناتجة من الطاقة الحرارية والثانية ناتجة عن مرور الطاقة الموجية لذلك فإنه من الضروري أيجاد طريقة أخرى لها فائدة عملية ، وأن هنالك عدة طرق وأهم هذه الطرق على الإطلاق هو أيجاد معادلة الموجة الصوتية بطريقة قياس الضغط الصوتي الذي يسببه مرور الموجات الصوتية في المائع (وخاصة في الغازات) ولأيجاد معادلة الموجة الصوتية بدلالة الضغط نستخدم المعادلتين (25، 28)

$$\bar{P} = -K \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad ---(25) \qquad \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad ---(28)$$

نأخذ المشتقة الثانية بالنسبة للزمن للمعادلة (25) وهي

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{P} = -K \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} = -K \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x} \quad ---(32)$$

والآن نأخذ المشتقة الأولى بالنسبة للإزاحة X للمعادلة (25) فتصبح

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad ---(33)$$

من المعادلتين (30) و (33) نحصل على :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$ (وهي نفسها معادلة 28)

نفاضل المعادلة الأخيرة بالنسبة للإزاحة X نحصل على :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} \quad ---(34)$$