القوانين المستخدمة لحل المسائل للأوتار المهتزة

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m}{L}$$

m : كتلة الوتر

L : طول الوتر

$$T = Mg$$

M : كتلة الثقل المربوط بالوتر

g : التعجيل الأرضي $9.8\ m/s^2$

$$f_n = \frac{n}{LD}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}$$

D : قطر الوتر

ρ : كثافة مادة الوتر

$$v = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

معادلة الموجة المستقيمة في الوتر :

$$Y = A\sin(wt - kx)$$

A : السعة

w : التردد الزاوي

k : ثابت الموجة

مسائل محلولة حول الفصل السادس

س 6-1) سلك مرن كتلته $6.5\ gm$ وطوله $(50\ cm)$ تحت قوة شد ثابتة يهتز كمقطع واحد بتردد مقداره $80\ Hz$. جد مقدار قوة الشد في السلك.

الحل:

$L = 50\times10^{-2}\ m$; $M = 6.5\times10^{-3}\ kg$

$f_1 = 80\ Hz$; $T = ?$ (لأنه يهتز كمقطع واحد $n=1$)

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \mu = \frac{M}{L}$$

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{M/L}} \Rightarrow T = \frac{4L^2M}{n^2}f_n^2$$

$$T = \frac{4\times(50\times10^{-2})\times(6.5\times10^{-3})}{1^2}\times(80)^2$$

$$T = 83.2\ N$$

س 6-2) سلكين من نفس المادة لهما نفس الطول ولكن نسبة أقطارهما $\frac{1}{1.44}$. السلك الأول تحت قوة شد تعادل ثقل كتلته $8\ kg$ كفي والثاني تحت قوة شد تعادل ثقل كتلته $11.52\ kg$. فإذا كان تردد النغمة الأساسية للسلك الأول هو $240\ Hz$. فما هو تردد السلك الثاني؟

الحل: $L' = L'' = L$; $T' = Mg = 8\times9.8\ N$; $f_1' = 240\ Hz$

$\rho' = \rho'' = \rho$; $T'' = 11.52\times9.8\ N$; $f_1'' = ?$ $\frac{D'}{D''} = \frac{1}{1.44}$

$$f_1 = \frac{1}{LD}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}$$

$$\frac{f_1''}{f_1'} = \frac{\frac{1}{L''D''}\sqrt{\frac{T''}{\pi\rho''}}}{\frac{1}{L'D'}\sqrt{\frac{T'}{\pi\rho'}}}$$

$$\frac{f_1''}{f_1'} = \frac{D'}{D''}\sqrt{\frac{T''}{T'}}$$

$$f_1'' = f_1'\frac{D'}{D''}\sqrt{\frac{T''}{T'}}$$

$$f_1'' = 240\times\frac{1}{1.44}\sqrt{\frac{11.52\times9.8}{8\times9.8}}$$

$$f_1'' = 200\ Hz$$

(6-3 مثال) خيط طوله 4 m وكتلته 30gm أحد طرفيه مربوط بنقطة ثابتة والطرف الآخر مرفوق بكرة ومعلق به جسم كتلته 20 kg فما هي سرعة الموجة المتولدة في هذا الخيط؟

الحل:

$L = 4m$ ؛ $M = 30gm$ ؛ $m = 20\ kg$ ؛ $U = ?$

$$U = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \mu = \frac{M}{L} = \frac{30 \times 10^{-3}}{4} = 7.5 \times 10^{-3}\ kg/m$$

$$T = mg = 20 \times 9.8 = 196\ N$$

$$U = \sqrt{\frac{196}{7.5 \times 10^{-3}}}$$

$$U = 161.66\ m/sec.$$

(6-4 مثال) سلك صونومتر طوله (0.4 m) وقطره (0.5 mm) وكثافة مادته ($8.9 \times 10^3\ \frac{kg}{m^3}$)، عندما يهتز الهتزاز مستعرض يبعث نغمة تكافئ تردداتها يساوي تردد الصوت الناتج عن قرص صفارة تنبيه قنوي على (20) ثقب بمعدل (30) دورة في الثانية. فما مقدار الحمل في السلك؟

الحل:

$L = 0.4\ m$ $D = 0.5\ mm$ $\rho = 8.9 \times 10^3\ kg/m^3$

$f_1 = 20 \times 30 = 600\ Hz$ $T = ?$

$$f_1 = \frac{1}{LD}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \Longrightarrow T = \pi\rho f^2 L^2 D^2$$

$$T = \pi \times (8.9 \times 10^3) \times 600^2 \times 0.4^2 \times (0.5 \times 10^{-3})^2$$

$$T = 402.79\ N$$

لإيجاد مقدار كتلة المعلقة في الصونومتر لتحدث قوة الشد الحزمة

$$m = \frac{T}{g} = \frac{402.79}{9.8} = 41.1\ kg$$

٥-٥) خيط كتلته 10 gm وطوله 100 cm مشدود بقوة . أحسب مقدار الشد بالكيلوغرام اللازم لكي يولد السلك نغمة ترددها 140 Hz ، عندما يهتز السلك ليعطي

(أ) نغمة أساسية (ب) نغمة توافقية ثانية .

الحل :

$m = 10\ gm \quad L = 100\ cm \quad f_1 = 140\ Hz$

(أ) $f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ⇘ $\mu = \frac{m}{L} = \frac{10 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-2}} = 0.01\ \frac{kg}{m}$

$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ⇘ $\boxed{T_n = \frac{4L^2\mu}{n^2} f_n^2}$

$T_1 = 4L^2 f^2 \mu = 4 \times (100 \times 10^{-2})^2 \times (140)^2 \times 0.01 = 784\ N$

$M_1 = \frac{T_1}{g} = \frac{784}{9.8} = 80\ kg$

(ب) $T_2 = \frac{4L^2\mu}{2^2} f_2^2 = L^2 \mu f_2^2$

$T_2 = (100 \times 10^{-2})^2 \times (0.01) \times (140)^2$

$T_2 = 196\ N$

$M_2 = \frac{T_2}{g} = \frac{196}{9.8} = 20\ kg$

٦-٧) حبل طوله 1.2 m وكتلته 0.3 gm ، ما هي سرعة الموجات المستعرضة في هذا الحبل عندما يكون مشدودًا بحمل كتلته 1 kg

الحل

$L = 1.2\ m \quad m = 0.3\ gm \quad U = ? \quad T = 1 \times 9.8 = 9.8\ N$

$U = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{9.8}{\frac{0.3 \times 10^{-3}}{1.2}}} = \sqrt{39200} \simeq 198\ m/s$

$\mu = \frac{m}{L}$

(4)

س 6-8) سلك متوتر طوله 100 cm يولد نغمة ترددها 256 هرتز عندما ينقر في جسر القطعتين 40 cm و 60 cm على الترتيب. ما هو تردد النغمة الأساسية المنبعثة من كل قطعة.

الحل

$L = 100\ cm = 1\ m$; $f_1 = 256\ Hz$; $L' = 40\ cm = 0.4\ m$

$f_1' = ?$; $f_1'' = ?$ $\quad n = 1$ $\quad L'' = 60\ cm = 0.6\ m$

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{2Lf_n}{n}$$

$$\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2 \times 1 \times 256 \quad n=1$$

$$= 512$$

بما أن السلك نفسه وقت الاهتزاز فإن قيمة التوتر T وكتلة وحدة الطول μ تبقى نفسها لأن $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ هو نفسه

(1) للجزء الذي طوله $L' = 40\ cm$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2 \times 0.4} \times 512 = 640\ Hz$$

(2) للجزء الذي طوله $L = 60\ cm$

$$f_1'' = \frac{1}{2 \times 0.6} \times 512 = 426.7\ Hz$$

س 6-9) إذا كانت إضافة 75 kg إلى قوة الشد في سلك مهتز يرفع التردد إلى الضعف فما هو مقدار قوة الشد الأصلية في السلك بوحدات الكيلوغرام.

الحل

$f' = 2f$

$$\frac{f'}{f} = \frac{2}{1} \qquad T' = T + 75$$

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow f \propto \sqrt{T}$$

$$\therefore \frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow \frac{2}{1} = \sqrt{\frac{T+75}{T}}$$

$$4 = 1 + \frac{75}{T} \Rightarrow 3 = \frac{75}{T} \Rightarrow T = \frac{75}{3}$$

$$T = 25\ kg$$